# РАЗНОЕ

512.548

## ТЕРНАРНЫЕ ГРУППЫ КУБИЧЕСКИХ МАТРИЦ

*А.М. Гальмак, Г.Н. Воробьёв*

В статье изучаются тернарные операции на множествах кубических матриц.

### 1. Введение

В данной статье символом $\mathrm{K}_{n\times n\times n}(P)$ обозначается множество всех кубических матриц порядка $n$ над полем $P$, у которых в каждом сечении любой ориентации все элементы симметричны как относительно главной диагонали, так и относительно побочной диагонали. Это множество является подмножеством множества $\Sigma_{n\times n\times n}(P)$ всех симметрических кубических матриц порядка $n$ над $P$. Изучению кубических матриц из $\mathrm{K}_{n\times n\times n}(P)$ посвящена статья [1]. Всю необходимую информацию о пространственных, в частности, кубических матрицах можно найти в книгах [2–4].

Отметим, что для любого $n \geq 2$ произведение двух симметрических матриц $n$-го порядка может не быть симметрической матрицей, то есть множество $\Sigma_{n\times n}(P)$ всех таких матриц не является замкнутым относительно операции умножения матриц, а значит, не является полугруппой. Тем не менее в этом множестве есть подмножества, замкнутые относительно операции умножения матриц. Например, полугруппа всех диагональных матриц.

Примером полугруппы во множестве $\Sigma_{2\times 2}(P)$ может служить его подмножество $\mathrm{K}_{2\times 2}(P)$ всех матриц второго порядка, симметричных не только относительно главной диагонали, но и относительно побочной диагонали, так как произведение

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

двух произвольных матриц из $\mathrm{K}_{2\times 2}(P)$ снова принадлежит этому множеству.

Так как

$$\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca+db & cb+da \\ da+cb & db+ca \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

Следовательно, полугруппа $\mathrm{K}_{2\times 2}(P)$ коммутативна.

Кроме того, так как

$$\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & c \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bd+ac & bc+ad \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix}, \tag{1.3}$$

то

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & c \\ c & d \end{pmatrix}.$$

В полугруппе $K_{2\times2}(P)$ имеется подгруппа $KGL_{2\times2}(P)$ всех матриц, у которых определитель отличен от нуля поля $P$, так как в этом случае множество $KGL_{2\times2}(P)$ замкнуто относительно операции умножения матриц, содержит единичную матрицу и, кроме того,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 - b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{a}{a^2 - b^2} & \dfrac{-b}{a^2 - b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2 - b^2} & \dfrac{a}{a^2 - b^2} \end{pmatrix} \in KGL_{2\times2}(P)$$

для любой матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in KGL_{2\times2}(P)$.

**Замечание 1.1.** При $n \geq 3$ множество $K_{n\times n}(P)$ всех матриц $n$-го порядка, симметричных как относительно главной диагонали, так и относительно побочной диагонали, не является замкнутым относительно операции умножения матриц. Например, произведение

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

двух матриц из $K_{3\times3}(P)$ не принадлежит этому множеству.

Для $n \geq 4$ положим: $A$ – матрица из $K_{n\times n}(P)$, у которой

$$a_{11} = a_{nn} = 1,$$

а все остальные элементы равны 0; $B$ – матрица из $K_{n\times n}(P)$, у которой

$$b_{12} = b_{21} = b_{(n-1)n} = b_{n(n-1)} = 1,$$

а все остальные элементы равны 0; $AB = C$. Тогда

$$c_{12} = a_{11}b_{12} = 1,\ c_{21} = 0,$$

то есть $c_{12} \neq c_{21}$. Следовательно, $AB = C \notin K_{n\times n}(P)$.

## 2. Бинарные операции над кубическими матрицами

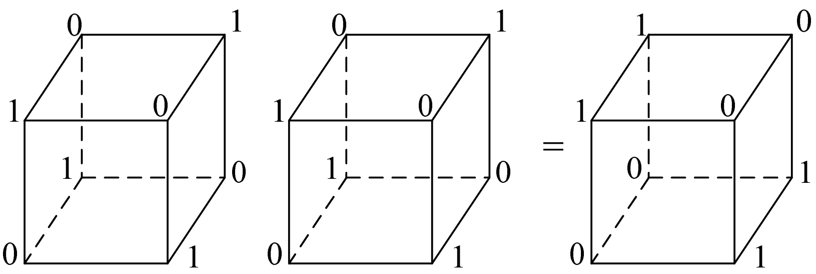
Переходя к операциям над кубическими матрицами, упомянём вначале операцию умножения многомерных матриц из [2, 3]. Говорить о замкнутости какого-либо подмножества множества $M_{2\times2\times2}(P)$ всех кубических матриц второго порядка над $P$ относительно этой операции не имеет смысла, так как результатом её применения к двум кубическим матрицам является четырёхмерная матрица.

Можно попробовать определить операцию на множестве $M_{2\times2\times2}(P)$ как-то иначе. Например, следующим образом: произведением $A \bullet_i B$ кубической матрицы $A = (a_{ijk}) \in M_{2\times2\times2}(P)$ на кубическую матрицу $B = (b_{ijk}) \in M_{2\times2\times2}(P)$ называется кубическая матрица $C = (c_{ijk}) \in M_{2\times2\times2}(P)$, у которой первое (второе) сечение ориентации ($i$) равно произведению первого (второго) сечения ориентации ($i$) кубической матрицы $A$ на первое (второе) сечение ориентации ($i$) кубической матрицы $B$. Аналогично определяются ещё два произведения $\bullet_j$ и $\bullet_k$, соответствующие направлениям ($j$) и ($k$).

Понятно, что в общем случае это три различные ассоциативные операции. Так как произведение двух симметрических матриц второго порядка может не быть симметрической матрицей, то множество $\Sigma_{2\times2\times2}(P)$ не является замкнутым относительно каждой из трёх указанных операций.

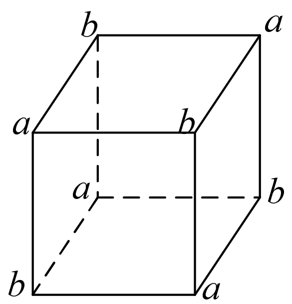
Так как $\mathrm{K}_{2\times2}(P)$ – полугруппа в $\Sigma_{2\times2}(P)$ и, кроме того, все сечения любой кубической матрицы из $\mathrm{K}_{2\times2\times2}(P)$ принадлежат $\mathrm{K}_{2\times2}(P)$, то можно было ожидать, что множество $\mathrm{K}_{2\times2\times2}(P)$ будет полугруппой в $\Sigma_{2\times2\times2}(P)$ относительно каждой из операций $\bullet_i$, $\bullet_j$ и $\bullet_k$. Как показывает следующий простой пример, это не так.

**Пример 2.1.** Ниже для операции $\bullet_i$ найдёно произведение кубической матрицы из $\mathrm{K}_{2\times2\times2}(P)$ на себя:




Как видно, в результате получилась матрица, не принадлежащая даже множеству $\Sigma_{2\times2\times2}(P)$.

**Замечание 2.1.** Множество $\mathrm{K}_{2\times2\times2}(P)$ совпадает с множеством всех кубических матриц второго порядка вида




(2.1)

Если не получается замкнутость множеств $\Sigma_{2\times2\times2}(P)$ и $\mathrm{K}_{2\times2\times2}(P)$ относительно бинарных операций, то, может быть, ситуацию улучшит переход к полиадическим, в частности, к тернарным операциям.

### 3. Тернарные операции $(\ )_{(i)}$, $(\ )_{(j)}$ и $(\ )_{(k)}$

Определим на множестве $\mathrm{M}_{2\times2\times2}(P)$ три тернарные операции $(\ )_{(i)}$, $(\ )_{(j)}$ и $(\ )_{(k)}$ – производные от соответствующих бинарных операций $\bullet_i$, $\bullet_j$ и $\bullet_k$, о которых говорилось в предыдущем разделе. Таким образом, для любых трёх кубических матриц

$$A = (a_{ijk}),\ B = (b_{ijk}),\ C = (c_{ijk}) \in \mathrm{M}_{2\times2\times2}(P)$$

имеем

$$(ABC)_{(i)} = R = (r_{ijk}),\ (ABC)_{(j)} = S = (s_{ijk}),\ (ABC)_{(k)} = T = (t_{ijk}),$$

где сечения ориентаций $(i)$, $(j)$ и $(k)$ кубических матриц $R$, $S$ и $T$ находятся по формулам

$$(r_{1jk}) = (a_{1jk})(b_{1jk})(c_{1jk}),\ (r_{2jk}) = (a_{2jk})(b_{2jk})(c_{2jk}),$$
$$(s_{i1k}) = (a_{i1k})(b_{i1k})(c_{i1k}),\ (s_{i2k}) = (a_{i2k})(b_{i2k})(c_{i2k}),$$
$$(t_{ij1}) = (a_{ij1})(b_{ij1})(c_{ij1}),\ (t_{ij2}) = (a_{ij2})(b_{ij2})(c_{ij2}).$$

Ясно, что тернарные операции $(\ )_{(i)}$, $(\ )_{(j)}$ и $(\ )_{(k)}$ ассоциативны.

Множество $\Sigma_{2\times2\times2}(P)$ не является замкнутым относительно каждой из трёх тернарных операций $(\ )_{(i)}$, $(\ )_{(j)}$ и $(\ )_{(k)}$. Например, для кубических матриц $A$ и $B$ из $\Sigma_{2\times2\times2}(P)$, у которых первые (вторые) сечения являются неперестановочными симметрическими матрицами второго порядка, и для кубической матрицы $C$ из $\Sigma_{2\times2\times2}(P)$, у которой первые (вторые) сечения являются единичной матрицей второго порядка, кубические матрицы $(ABC)_{(i)}$, $(ABC)_{(j)}$ и $(ABC)_{(k)}$ не принадлежат множеству $\Sigma_{2\times2\times2}(P)$, так как их первые (вторые) сечения не являются симметрическими матрицами.

**Замечание 3.1.** Рассмотрим две произвольные кубические матрицы $A$ и $B$ из $\mathrm{K}_{2\times2\times2}(P)$, у которых

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$$

– соответственно первые сечения,

$$\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} d & c \\ c & d \end{pmatrix}$$

– соответственно вторые сечения. Тогда у кубической матрицы $A \bullet_i B$ первые сечения ориентации $(i)$ совпадают с матрицей из правой части в (1.1), а вторые сечения ориентации $(i)$ совпадают с матрицей из правой части в (1.2). Поэтому если предположить $A \bullet_i B \in \mathrm{K}_{2\times2\times2}(P)$, то

$$ca + bd = bc + ad,$$

что равносильно

$$ca - bc + bd - ad = 0,$$
$$c(a - b) - d(a - b) = 0,$$
$$(a - b)(c - d) = 0,$$
$$a = b \text{ или } c = d.$$

Таким образом,

$$A \bullet_i B \in \mathrm{K}_{2\times2\times2}(P) \textit{ тогда и только тогда, когда } a = b \textit{ или } c = d. \tag{3.1}$$

Аналогично

$$A \bullet_j B \in \mathrm{K}_{2\times2\times2}(P) \textit{ тогда и только тогда, когда } a = b \textit{ или } c = d,$$
$$A \bullet_k B \in \mathrm{K}_{2\times2\times2}(P) \textit{ тогда и только тогда, когда } a = b \textit{ или } c = d.$$

Таким образом, в общем случае *множество* $\mathrm{K}_{2\times2\times2}(P)$ *не является замкнутым относи-*

*тельно каждой из операций* $\bullet_i$, $\bullet_j$ и $\bullet_k$. В частности, пример 3.1 является следствием утверждения (3.1).

Рассмотрим теперь три произвольные кубические матрицы из $K_{2\times2\times2}(P)$, у которых первые сечения совпадают соответственно с матрицами

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g & h \\ h & g \end{pmatrix},$$

а вторые сечения совпадают соответственно с матрицами

$$\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} d & c \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & h \\ h & g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & h \\ h & g \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} acg+bdg+adh+bch & ach+bdh+adg+bcg \\ bcg+adg+bdh+ach & bch+adh+bdg+acg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & c \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bd+ac & bc+ad \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h & g \\ g & h \end{pmatrix} =$$

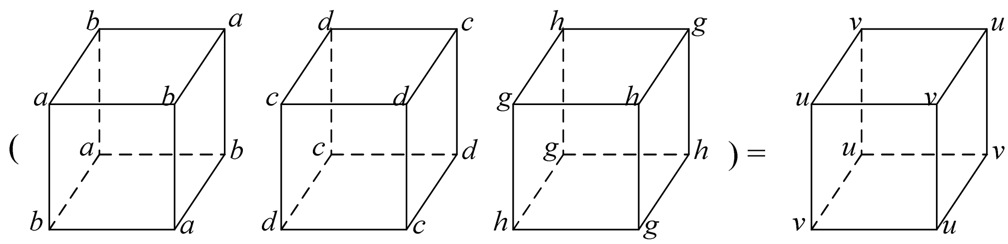
$$= \begin{pmatrix} bdh+ach+bcg+adg & bdg+acg+bch+adh \\ adh+bch+acg+bdg & adg+bcg+ach+bdh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ u & v \end{pmatrix},$$

где

$$u = acg + bdg + adh + bch,\ v = ach + bdh + adg + bcg,$$

то тернарные операции $(\ )_{(i)}$, $(\ )_{(j)}$ и $(\ )_{(k)}$, применённые к трём указанным кубическим матрицам из $K_{2\times2\times2}(P)$, дают один и тот же результат, снова принадлежащий $K_{2\times2\times2}(P)$. Указанное совпадение позволяет ввести на множестве $K_{2\times2\times2}(P)$ общее обозначение $(\ )$ для тернарных операций $(\ )_{(i)}$, $(\ )_{(j)}$ и $(\ )_{(k)}$.

Таким образом,



Полученное равенство показывает замкнутость множества $K_{2\times2\times2}(P)$ относительно тернарной операции $(\ )$. А так как полугруппа $K_{2\times2}(P)$ коммутативна, то *тернарная операция* $(\ )$ *является абелевой*.

Для сокращения записей кубическую матрицу вида (2.1) будем обозначать символом $K(a, b)$. В этих обозначениях множество $K_{2\times2\times2}(P)$ определяется равенством

$$\mathrm{K}_{2\times2\times2}(P) = \{K(a, b)\,|\, a, b \in P\},$$

а полученное выше равенство принимает вид

$$(K(a, b)K(c, d)K(g, h)) = K(acg + bdg + adh + bch,\ ach + bdh + adg + bcg).$$

Выделим во множестве $\mathrm{K}_{2\times2\times2}(P)$ подмножество $\mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P)$ всех кубических матриц вида (2.1), у которых $a^2 - b^2 \neq 0$, что равносильно $b \neq a$, $b \neq -a$, а также подмножество $\mathrm{KSL}_{2\times2\times2}(P)$ всех кубических матриц вида (2.1), у которых $a^2 - b^2 = 1$.

Если

$$(K(a, b)K(c, d)K(g, h)) = K(u, v),\ K(a, b),\ K(c, d),\ K(g, h) \in \mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P),$$

то, как установлено выше, $K(u, v) \in \mathrm{K}_{2\times2\times2}(P)$. Кроме того,

$$u^2 - v^2 = \det\begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix} = \det(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} g & h \\ h & g \end{pmatrix}) =$$

$$= \det\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} g & h \\ h & g \end{pmatrix} = (a^2 - b^2)(c^2 - d^2)(g^2 - h^2) \neq 0,$$

Следовательно, множество $\mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P)$ замкнуто относительно тернарной операции ( ).

Аналогично доказывается замкнутость относительно тернарной операции ( ) множества $\mathrm{KSL}_{2\times2\times2}(P)$. Ясно, что элементами этого множества являются кубические матрицы $K(1, 0)$ и $K(-1, 0)$.

Теперь можно сформулировать следующее:

**Предложение 3.1.** *Универсальная алгебра* $< \mathrm{K}_{2\times2\times2}(P), (\ ) >$ *является абелевой тернарной полугруппой, а универсальные алгебры*

$$< \mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P), (\ ) >,\ < \mathrm{KSL}_{2\times2\times2}(P), (\ ) >$$

*– её тернарными подполугруппами. Таковыми являются также следующие множества, рассматриваемые вместе с тернарной операцией* ( )

$$\{K(a, 0)\,|\, a \in P\},$$

$$\{K(0, a)\,|\, a \in P\},$$

$$\{K(a, 0)\,|\, a \in P, a \neq 0\},$$

$$\{K(0, a)\,|\, a \in P, a \neq 0\},$$

$$\{K(a, 0)\,|\, a \in P, a^2 = 1\},$$

$$\{K(0, a)\,|\, a \in P, a^2 = 1\},$$

$$\{K(a, 0)\,|\, a \in P\} \cup \{K(0, a)\,|\, a \in P\},$$

$$\{K(a, 0)\,|\, a \in P, a \neq 0\} \cup \{K(0, a)\,|\, a \in P, a \neq 0\},$$

$$\{K(a, 0)\,|\, a \in P, a^2 = 1\} \cup \{K(0, a)\,|\, a \in P, a^2 = 1\}.$$

## 4. Тернарная группа $< \mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P), (\ ) >$

Проведя несложные вычисления, можно убедиться в справедливости следующей леммы, которая получается также из соответствующих общих результатов для $l$-арных групп при $l = 3$ (см., например, [5]).

**Лемма 4.1.** *Пусть* $< A, [\,] >$ – *тернарная группа,* $\overline{a}$ – *косой элемент для элемента* $a \in A$, $\circ_a$ – *бинарная операция на множестве* $A$, *определяемая формулой*

$$x \circ_a y = [x\,\overline{a}\,y].$$

*Тогда* $< A, \circ_a >$ – *группа с единицей* $a$. *Если* $a$ – *единица тернарной группы* $< A, [\,] >$, *то тернарная группа* $< A, [\,] >$ *является производной от группы* $< A, \circ_a >$.

**Теорема 4.1.** *Справедливы следующие утверждения*:

1) *универсальная алгебра* $< \mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P), (\,) >$ *является абелевой тернарной группой*;

2) *для любой кубической матрицы* $K(a, b) \in \mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P)$ *косым элементом в* $< \mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P), (\,) >$ *является кубическая матрица* $\overline{K(a,b)}$, *у которой первые и вторые сечения имеют соответственно вид*

$$\frac{1}{a^2 - b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix}, \ \frac{1}{a^2 - b^2}\begin{pmatrix} -b & a \\ a & -b \end{pmatrix},$$

*то есть*

$$\overline{K(a,b)} = \frac{1}{a^2 - b^2} K(a, -b);$$

3) *в тернарной группе* $< \mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P), (\,) >$ *множество всех её идемпотентов совпадает с тернарной подгруппой всех её единиц*;

4) *если характеристика поля* $P$ *отлична от* 2, *то в* $< \mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P), (\,) >$ *имеется ровно четыре идемпотента* (*единицы*)

$$K(1, 0), K(0, 1), K(-1, 0), K(0, -1);$$

5) *если характеристика поля* $P$ *равна* 2, *то множество всех идемпотентов* (*единиц*) *в* $< \mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P), (\,) >$ *имеет вид*

$$\{K(a, b) \mid a^2 + b^2 = 1\};$$

6) *тернарная группа* $< \mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P), (\,) >$ *является производной от группы*

$$< \mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P), \circ_{K(a,\,b)} >.$$

*для любой своей единицы* $K(a, b)$.

*Доказательство*. 1) Пусть $K(a, b)$, $K(c, d)$, $K(u, v)$ – произвольные кубические матрицы из $\mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P)$. Тогда

$$\begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathrm{KGL}_{2\times2}(P).$$

Так как $\mathrm{KGL}_{2\times2}(P)$ – группа, то

$$\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}^{-1}, \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} \in \mathrm{KGL}_{2\times2}(P),$$

$$\begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} \in \mathrm{KGL}_{2\times2}(P).$$

Положив

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1}, \tag{4.1}$$

и используя соответствующие свойства транспонированных матриц, а также абелевость группы $\mathrm{KGL}_{2\times2}(P)$, получим

$$\begin{pmatrix} y & x \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}' = \left(\begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1}\right)' =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1}\right)'\left(\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}^{-1}\right)'\begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}' = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}'\right)^{-1}\left(\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}'\right)^{-1}\begin{pmatrix} v & u \\ u & v \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} d & c \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} v & u \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & c \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}^{-1},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} y & x \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ u & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & c \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}^{-1}. \tag{4.2}$$

Из (4.1) и (4.2) вытекают равенства

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y & x \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d & c \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v & u \\ u & v \end{pmatrix},$$

из которых, в свою очередь, следует равенство

$$(K(x, y)K(a, b)K(c, d)) = K(u, v),$$

где

$$\begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v & u \\ u & v \end{pmatrix} \in \mathrm{KGL}_{2\times2}(P).$$

Следовательно, кубическая матрица $K(x, y) \in \mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P)$ является решением уравнения

$$(XK(a, b)K(c, d)) = K(u, v).$$

Аналогично доказывается разрешимость в $< \mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P), (\ ) >$ уравнений

$$(K(a, b)XK(c, d)) = K(u, v),$$
$$(K(a, b)K(c, d)X) = K(u, v).$$

Таким образом, < $KGL_{2\times 2\times 2}(P)$, ( ) > – тернарная группа.

Абелевость тернарной группы < $KGL_{2\times 2\times 2}(P)$, ( ) > следует из предложения 3.1.

2) Пусть $\overline{K(a, b)} = K(x, y)$, то есть

$$(K(a, b)K(a, b)K(x, y)) = K(a, b).$$

Последнее равенство равносильно двум матричным равенствам

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & x \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix},$$

откуда

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & x \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и далее

$$\begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2 - b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2 - b^2} & \frac{-b}{a^2 - b^2} \\ \frac{-b}{a^2 - b^2} & \frac{a}{a^2 - b^2} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} y & x \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{b^2 - a^2}\begin{pmatrix} b & -a \\ -a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-b}{a^2 - b^2} & \frac{a}{a^2 - b^2} \\ \frac{a}{a^2 - b^2} & \frac{-b}{a^2 - b^2} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\overline{K(a, b)} = K\left(\frac{a}{a^2 - b^2}, \frac{-b}{a^2 - b^2}\right) = \frac{1}{a^2 - b^2}K(a, -b).$$

3) В любой абелевой полиадической группе множество всех её идемпотентов совпадает с тернарной подгруппой всех её единиц.

4), 5) Предположим, что $K(a, b)$ – идемпотент в < $KGL_{2\times 2\times 2}(P)$, ( ) >, то есть

$$(K(a, b)K(a, b)K(a, b)) = K(a, b).$$

Последнее равенство равносильно двум матричным равенствам

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix},$$

из которых, в свою очередь, следуют равенства

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & a \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix},$$

то

$$\begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab \\ 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда

$$a^2 + b^2 = 1,\ 2ab = 0. \tag{4.3}$$

Пусть характеристика поля $P$ отлична от 2. Из второго равенства в (4.3) следует $a = 0$ или $b = 0$. Если $a = 0$, то из первого равенства в (4.3) следует $b = 1$ или $b = -1$ $(1 \neq -1)$. Если же $b = 0$, то из первого равенства в (4.3) следует $a = 1$ или $a = -1 (1 \neq -1)$. Таким образом, в этом случае элементами

$$K(0, 1), K(0, -1), K(1, 0), K(-1, 0)$$

исчерпываются все идемпотенты в тернарной группе $< \mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P), (\ ) >$.

Пусть теперь характеристика поля $P$ равна 2. В этом случае второе равенства в (4.3) верно для любых $a, b \in P$. Поэтому кубическая матрица $K(a, b)$ является идемпотентом в $< \mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P), (\ ) >$ тогда и только тогда, когда верно первое равенство из (4.3).

6) Применяется лемма 4.1. Теорема доказана.

Справедливо также

**Предложение 4.1.** *Универсальная алгебра* $< \mathrm{KSL}_{2\times2\times2}(P), (\ ) >$ *является тернарной подгруппой тернарной группы* $< \mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P), (\ ) >$. *Таковыми являются также следующие множества, рассматриваемые вместе с тернарной операцией* ( ):

$$\{K(a, 0) \mid a \in P, a \neq 0\},$$

$$\{K(0, a) \mid a \in P, a \neq 0\},$$

$$\{K(a, 0) \mid a \in P, a^2 = 1\},$$

$$\{K(0, a) \mid a \in P, a^2 = 1\},$$

$$\{K(a, 0) \mid a \in P, a \neq 0\} \cup \{K(0, a) \mid a \in P, a \neq 0\},$$

$$\{K(a, 0) \mid a \in P, a^2 = 1\} \cup \{K(0, a) \mid a \in P, a^2 = 1\}.$$

**Замечание 4.1.** Согласно утверждению 4) теоремы 4.1, если поле $P$ имеет нулевую характеристику, то в тернарной группе < $\mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(P)$, ( ) > ровно четыре идемпотента (единицы):

$$K(1, 0),\ K(0, 1),\ K(-1, 0),\ K(0, -1).$$

В частности, это верно для тернарной группы < $\mathrm{KGL}_{2\times2\times2}(\mathrm{C})$, ( ) > над полем $P$ комплексных чисел.

**Заключение**

Получены новые результаты о тернарных операциях на множествах кубических матриц второго порядка над полем $P$. Построена тернарная операция, относительно которой, как установлено, множество всех кубических матриц второго порядка над $P$, у которых все сечения являются элементами полной линейной группы, и в каждом сечении любой ориентации все элементы симметричны как относительно главной диагонали, так и относительно побочной диагонали, является тернарной группой. Описано строение этой тернарной группы.

**Литература**

1 Гальмак, А.М. О кубических матрицах / А.М. Гальмак // Гиперкомплексные числа в геометрии и физике. – 2015. – № 1.(22) – С. 4–34.
2 Соколов, Н.П. Пространственные матрицы и их приложения / Н.П. Соколов. – М.: Наука, 1960. – 300 с.
3 Соколов, Н.П. Введение в теорию пространственных матриц / Н.П. Соколов. – Киев: Наукова думка, 1972. – 175 с.
4 Гальмак, А.М. Полиадические группы и обобщённые матрицы / А.М. Гальмак. – Могилёв: МГУП, 2015. – 295 с.
5 Гальмак, А.М. *n*-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202с.

*Поступила в редакцию 11.07.2016*