

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ УДАРНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ МОДЕЛИ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПРИ РАЗРУШЕНИИ ХРУПКИХ ПИЩЕВЫХ МАТЕРИАЛОВ

В.Г. Харкевич

Рассмотрена задача построения математической модели процесса измельчения высушенных хлебобулочных изделий, основанная на применении универсального метода составления уравнений движения – метода кинестатики, позволившего учесть силы трения в кинематических парах. Для решения поставленной задачи была составлена расчетная схема трехзвенной механической системы с указанием всех силовых факторов, используемых при выводе уравнений движения. Уравнения представлены в такой форме, что в них разделены постоянные параметры, независимые от движения ударных элементов, и параметры, изменяемые во времени в процессе работы измельчителя.

Введение

Рассмотрим движение ударных элементов до момента их взаимодействия (соударения) с частицей измельчаемого материала. На рисунке 1 показана схема модели движения ударных элементов измельчителя.

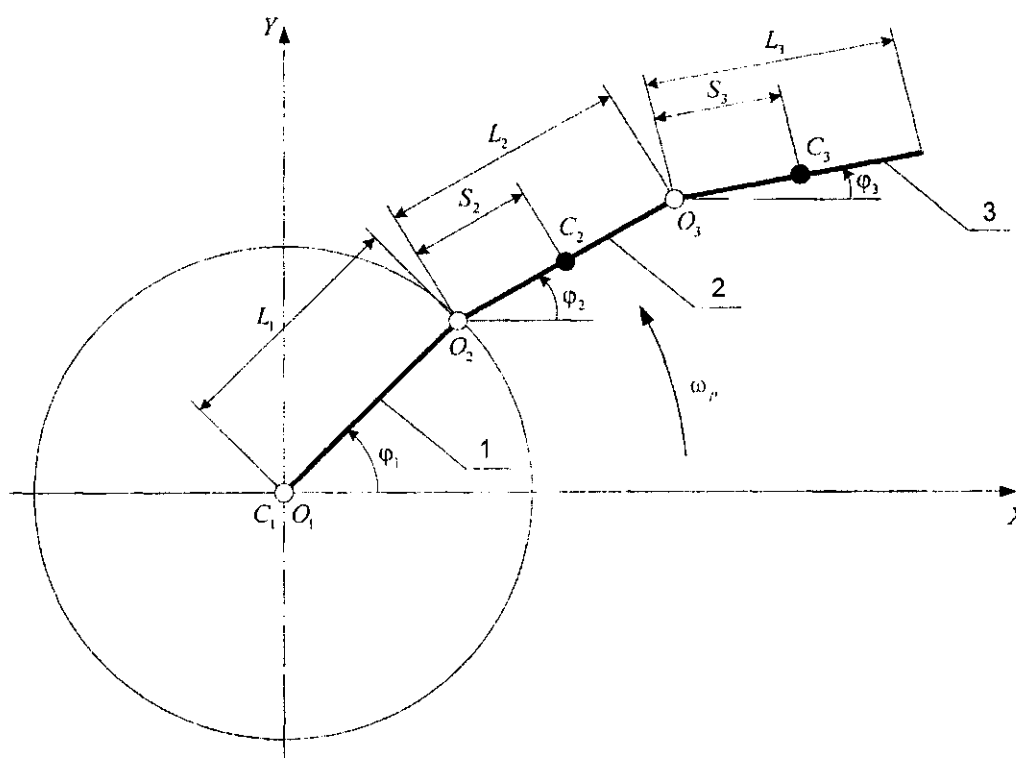


Рисунок 1 – Схема модели движения шарнирно-сочлененных ударных элементов
 Модель, показанная на рисунке 1, представляет собой трехзвенную незамкнутую плоскую кинематическую цепь [1; 2], соединенную с осью вращения в точке O_1 .

Для принятой модели используем обозначения:

L_1 – длина (радиус ротора) первого звена с осью вращения в точке O_1 ;

L_2 – длина второго звена с осью вращения в точке O_2 ;

L_3 – длина третьего звена с осью вращения в точке O_3 ;

S_1 – расстояние от оси вращения O_1 до центра масс C_1 первого звена (на схеме не показано, т.к. в нашем случае центр масс первого звена совпадает с осью его вращения, следовательно, $S_1 = 0$);

S_2 – расстояние от оси вращения O_2 до центра масс C_2 второго звена;

S_3 – расстояние от оси вращения O_3 до центра масс C_3 третьего звена;

φ_1 – угол, образованный первым звеном с осью O_1x ;

φ_2 – угол, образованный вторым звеном с осью O_1x ;

φ_3 – угол, образованный третьим звеном с осью O_1x .

Из схемы, представленной на рисунке 1, видно, что абсолютные углы поворота φ_1 , φ_2 и φ_3 соответственно звеньев 1, 2 и 3 являются независимыми величинами, заданием которых однозначно определяется положение всех точек представленной механической системы. Вышеуказанные величины называют независимыми обобщенными координатами данной системы. Из теоретической механики известно, что число независимых обобщенных координат механической системы равно числу ее степеней свободы [3]. Следовательно, система, представленная на рисунке 1, имеет три степени свободы.

Также известно, что если между точками (телами) механической системы происходит силовое взаимодействие, то положение или движение каждой точки (тела) зависит от положения и перемещения всех остальных [4; 5; 6]. Поэтому для описания динамики поведения данной механической системы требуется составить дифференциальные уравнения движения для каждого ее звена.

Одним из важных моментов является выбор методики составления данных уравнений. В настоящее время существует достаточно много методов, учитывающих особенности движения и имеющих свои границы применимости. Такими уравнениями являются, например, *уравнения Лагранжа второго рода, уравнения Лагранжа с неопределенными множителями* (иногда эти уравнения называют уравнениями Рауса-Феррерса), *уравнения Аппеля* и т.д. Существуют и универсальные уравнения, используемые во всех случаях, например, уравнения движения механических систем, полученные с помощью *основного закона динамики, общих теорем или принципов механики*.

Анализ литературы [7–9] показывает, что для исследования движения широко применяются уравнения Лагранжа второго рода, используемые при голономных, т.е. аналитических связях.

Нам представляется, что наиболее удобным и практичным вариантом в данной ситуации окажется такой универсальный метод составления уравнений движения, как метод кинестатики, в основе которого лежит один из общих принципов механики, называемый *принципом Даламбера*. В этом случае отпадают проблемы, связанные с классификацией типа связи и выбора способа составления уравнений движения. Связи могут быть как голономными, так и неголономными [2], можно рассматривать как несвободные тела [10], так и свободные [11,12].

Особенно удобно применение кинестатического принципа составления уравнений движения при необходимости учета сил трения в кинематических парах [2; 13; 14], что невозможно реализовать в уравнениях Лагранжа.

Результаты исследований и их обсуждение

Для решения нашей задачи составим расчетную схему трехзвенной механической системы, показав на рисунке 2 все силовые факторы, используемые при выводе уравнений движения.

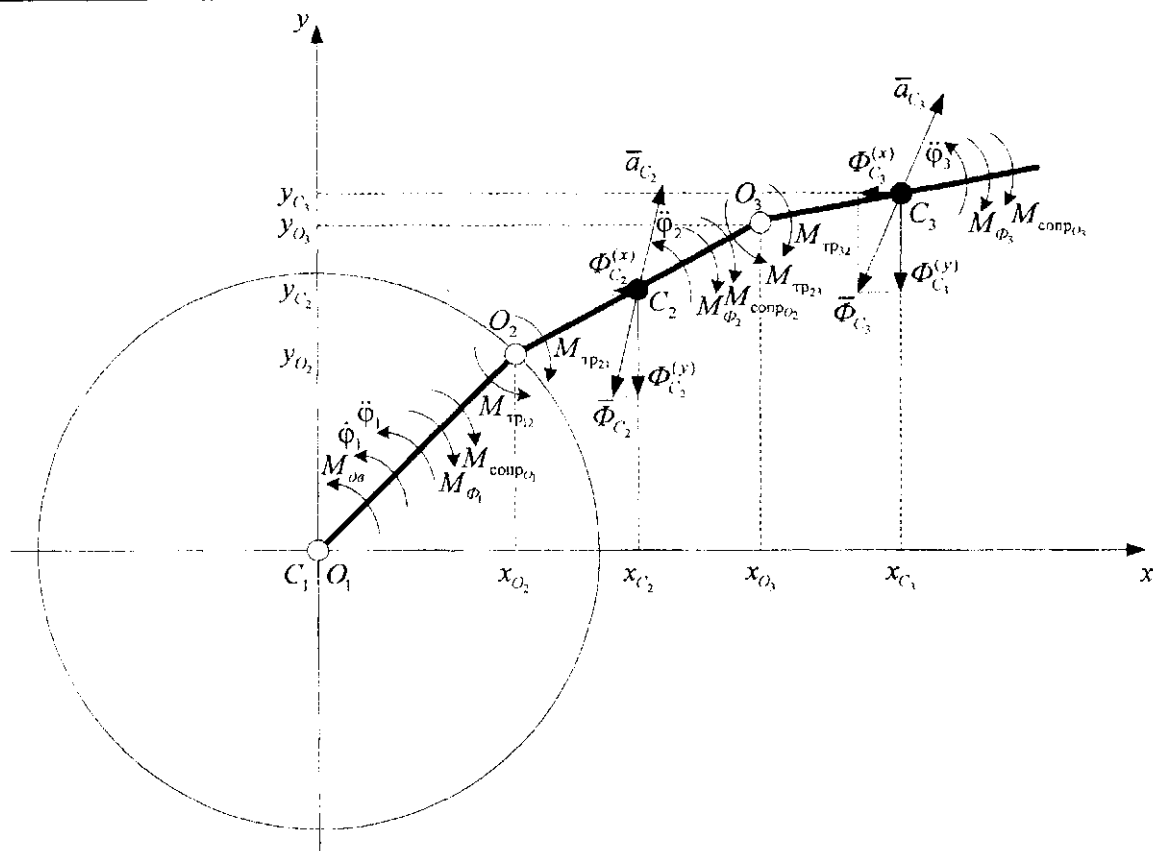


Рисунок 2 – Расчетная схема трехзвенной механической системы

На расчетной схеме, приведенной на рисунке 2, показано:

$x_{O_2}, x_{C_2}, x_{O_3}, x_{C_3}, y_{O_2}, y_{C_2}, y_{O_3}$ и y_{C_3} – координаты точек O_2, C_2, O_3 и C_3 соответственно по оси x и y ;

$\dot{\varphi}_1$ – угловая скорость первого звена;

$M_{0\delta}$ – движущий момент механической системы, приложенный к первому звену;

$\ddot{\varphi}_1, \ddot{\varphi}_2$ и $\ddot{\varphi}_3$ – угловые ускорения соответственно первого, второго и третьего звена;

$M_{\varphi_1}, M_{\varphi_2}$ и M_{φ_3} – моменты пар сил инерции, приложенные соответственно к первому, второму и третьему звену, которые определяются по выражениям (1–3):

$$M_{\varphi_1} = -J_{C_1} \ddot{\varphi}_1, \tag{1}$$

$$M_{\varphi_2} = -J_{C_2} \ddot{\varphi}_2, \tag{2}$$

$$M_{\varphi_3} = -J_{C_3} \ddot{\varphi}_3, \tag{3}$$

где J_{C_1}, J_{C_2} и J_{C_3} – центральные моменты инерции соответственно первого, второго и третьего звена;

$M_{тp12}, M_{тp21}, M_{тp23}$ и $M_{тp32}$ – моменты трения в кинематических парах (шарнирах), возникающие между первым и вторым (точка O_2) и вторым и третьим (точка O_3) звеньями;

\bar{a}_{C_2} и \bar{a}_{C_3} – линейные ускорения центра масс соответственно второго и третьего звена;

$\bar{\Phi}_{C_2}$ и $\bar{\Phi}_{C_3}$ – силы инерции центра масс соответственно второго и третьего звена, которые определяются по выражениям (4–5):

$$\bar{\Phi}_{C_2} = -m_2 \bar{a}_{C_2}, \quad (4)$$

$$\bar{\Phi}_{C_3} = -m_3 \bar{a}_{C_3}, \quad (5)$$

где m_2 и m_3 – масса первого и второго звена;

$\Phi_{C_2}^{(x)}$, $\Phi_{C_2}^{(y)}$, $\Phi_{C_3}^{(x)}$ и $\Phi_{C_3}^{(y)}$ – проекции сил инерции центра масс второго и третьего звена ($\bar{\Phi}_{C_2}$ и $\bar{\Phi}_{C_3}$) соответственно на ось x и y , которые определяются по выражениям (6–9):

$$\Phi_{C_2}^{(x)} = -m_2 \ddot{x}_{C_2}, \quad (6)$$

$$\Phi_{C_2}^{(y)} = -m_2 \ddot{y}_{C_2}, \quad (7)$$

$$\Phi_{C_3}^{(x)} = -m_3 \ddot{x}_{C_3}, \quad (8)$$

$$\Phi_{C_3}^{(y)} = -m_3 \ddot{y}_{C_3}, \quad (9)$$

где \ddot{x}_{C_2} , \ddot{x}_{C_3} , \ddot{y}_{C_2} и \ddot{y}_{C_3} – проекции линейных ускорений центра масс второго и третьего звена (\bar{a}_{C_2} и \bar{a}_{C_3}) соответственно на ось x и y ;

$M_{сопр, \alpha}$, $M_{сопр, \omega_2}$ и $M_{сопр, \omega_3}$ – моменты сил сопротивления движению, приложенные соответственно к первому, второму и третьему звену.

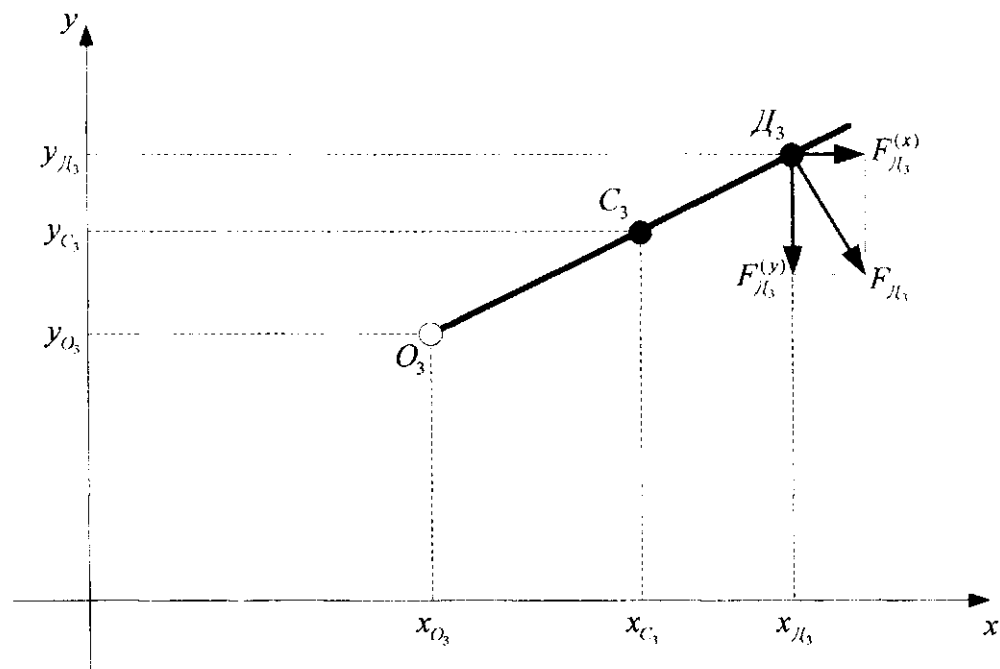


Рисунок 3 – Расчетная схема для определения моментов сопротивления движению на третьем звене относительно точки O_3

Моменты сил сопротивления движению складываются из сопротивления среды, которая включает в себя перепад давления, возникающий при обтекании объекта, и трения, которое возникает между ударными элементами и данной средой.

Рассмотрим, как определяются моменты сил сопротивления движению на примере третьего звена. Для этого составим расчетную схему, показанную на рисунке 3, обозначив на ней центр давления (точка D_3), к которому приложим силу сопротивления F_{D_3} . Координаты точки D_3 зависят от вида сопротивления среды и способа ее распределения на ударных элементах.

Запишем, как согласно расчетной схеме (рисунок 3) будет определяться момент сил сопротивления третьего звена:

$$M_{\text{сопр}_{O_3}} = -F_{D_3}^{(y)}(x_{D_3} - x_{O_3}) - F_{D_3}^{(x)}(y_{D_3} - y_{O_3}), \quad (10)$$

где $F_{D_3}^{(x)}$ и $F_{D_3}^{(y)}$ – проекции силы сопротивления F_{D_3} соответственно на ось x и y ;
 x_{D_3} и y_{D_3} – координаты точки D_3 соответственно по оси x и y .

Силу сопротивления F_{D_3} можно определить по выражению (11), Н:

$$F_{D_3} = \xi S \rho \frac{v_{об}^2}{2}, \quad (11)$$

где ξ – коэффициент лобового сопротивления;

S – площадь миделевого сечения (площадь проекции обтекаемого тела на плоскость перпендикулярную проекции скорости относительного движения), m^2 ;

ρ – эффективная плотность среды, kg/m^3 , определяемая по формуле

$$\rho = \left(\frac{x}{\rho_T} + \frac{1-x}{\rho_{возд}} \right)^{-1},$$

где ρ_T и $\rho_{возд}$ – соответственно плотность твердых частиц и воздуха, kg/m^3 ,

x – массовая концентрация взвешенных твердых частиц, kg/kg ;

$v_{об}$ – скорость относительного обтекания, m/s , которая определяется как

$$v_{об} = v_{бита} - v_{воздуха}.$$

В то же время силы сопротивления могут быть приведены к центру масс звена. Тогда согласно расчетной схеме, показанной на рисунке 4, момент сил сопротивления третьего звена будет равен:

$$M_{\text{сопр}_{O_3}} = -F_{D_3}^{(y)}(x_{C_3} - x_{O_3}) - F_{D_3}^{(x)}(y_{C_3} - y_{O_3}) - M_{C_3}^{F_{D_3}^{(y)}} - M_{C_3}^{F_{D_3}^{(x)}}.$$

Или, расписав моменты $M_{C_3}^{F_{D_3}^{(y)}}$ и $M_{C_3}^{F_{D_3}^{(x)}}$, полученные при переносе сил сопротивления из точки D_3 в центр масс звена (точка C_3), имеем

$$M_{\text{сопр}_{O_3}} = -F_{D_3}^{(y)}(x_{C_3} - x_{O_3}) - F_{D_3}^{(x)}(y_{C_3} - y_{O_3}) - F_{D_3}^{(y)}(x_{D_3} - x_{C_3}) - F_{D_3}^{(x)}(y_{D_3} - y_{C_3}).$$

Преобразовав данное уравнение, получим

$$M_{\text{сопр}_{O_3}} = -F_{D_3}^{(y)}(x_{D_3} - x_{O_3}) - F_{D_3}^{(x)}(y_{D_3} - y_{O_3}). \quad (12)$$

Сравнивая выражения (10) и (12), составленные по расчетным схемам рисунков 3 и 4, можно сделать вывод, что моменты сопротивления движению, записанные относительно конкретной точки (в данном случае относительно точки O_3), определяются по одинаковым выражениям независимо от того, к какой точке звена будут приведены силы сопротивления, если точка приложения данных сил постоянна.

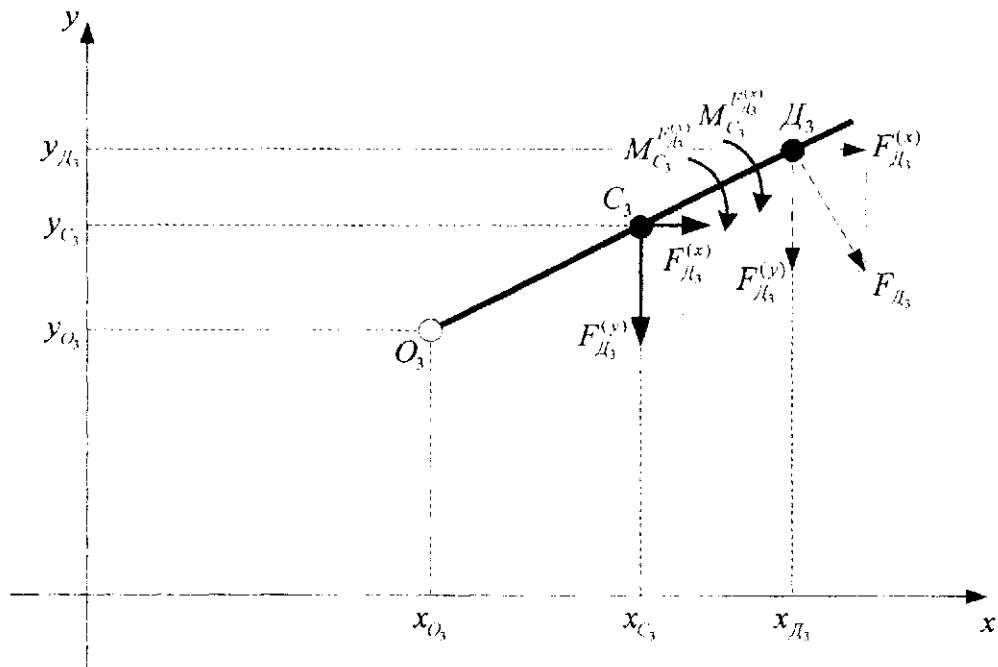


Рисунок 4 – Расчетная схема определения моментов сопротивления движению при переносе точки приложения сил давления

В связи с тем, что масса ударных элементов значительно превышает массу шарниров, то по этой причине в динамическом анализе массой последних пренебрегаем из-за их малости и представляем их в виде безынерционных элементов [7].

Составим уравнения кинестатического равновесия исследуемой части механической системы в виде суммы моментов относительно освобожденной кинематической пары. В этом случае для получения расчетной схемы при составлении уравнений последовательно отбрасываем звенья механической системы со стороны опоры, как и при силовом анализе.

Тогда для трехзвенной механической системы, изображенной на рисунке 2, относительно ее кинематических пар (O_1 , O_2 и O_3) имеем:

$$\sum M_{O_1} = 0, \quad (13)$$

$$\sum M_{O_2} = 0, \quad (14)$$

$$\sum M_{O_3} = 0. \quad (15)$$

Уравнение движения (13), составленное для всей механической системы с тремя степенями свободы относительно точки O_1 (рисунок 2), будет иметь вид

$$M_{os} - M_{\phi_1} - M_{сопр_{O_1}} - \Phi_{C_2}^{(y)} x_{C_2} + \Phi_{C_2}^{(x)} y_{C_2} - M_{\phi_2} - M_{сопр_{O_2}} -$$

$$-\Phi_{C_3}^{(y)} x_{C_3} + \Phi_{C_3}^{(x)} y_{C_3} - M_{\phi_3} - M_{\text{сопр}_{O_3}} = 0. \quad (16)$$

Для составления уравнения движения (14) относительно точки O_2 отбросим первое звено (рисунок 5).

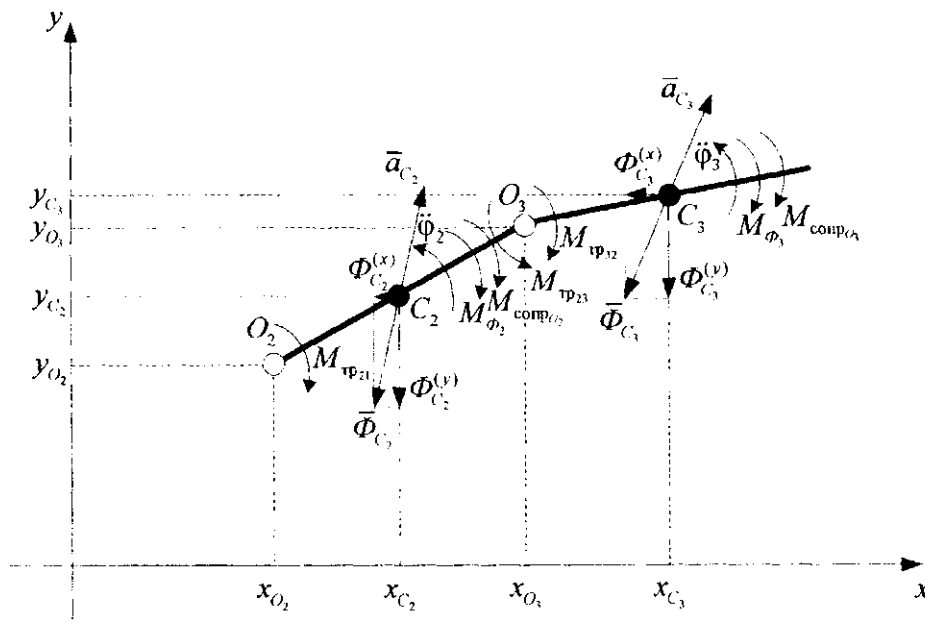


Рисунок 5 – Расчетная схема для составления уравнения движения относительно точки O_2

Тогда уравнение примет вид

$$\begin{aligned} & -M_{\text{тр}21} - \Phi_{C_2}^{(y)} (x_{C_2} - x_{O_2}) + \Phi_{C_2}^{(x)} (y_{C_2} - y_{O_2}) - M_{\phi_3} - M_{\text{сопр}_{O_2}} - \\ & - \Phi_{C_3}^{(y)} (x_{C_3} - x_{O_2}) + \Phi_{C_3}^{(x)} (y_{C_3} - y_{O_2}) - M_{\phi_3} - M_{\text{сопр}_{O_3}} = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Для составления уравнения движения (15) относительно точки O_3 отбросим второе звено (рисунок 6).

Тогда уравнение примет вид

$$-M_{\text{тр}32} - \Phi_{C_3}^{(y)} (x_{C_3} - x_{O_3}) + \Phi_{C_3}^{(x)} (y_{C_3} - y_{O_3}) - M_{\phi_3} - M_{\text{сопр}_{O_3}} = 0. \quad (18)$$

Воспользовавшись выражениями (1–3) и (6–9), преобразуем соответственно уравнения (16–18) к следующему виду:

$$\begin{aligned} & M_{O_1} - J_{C_1} \ddot{\phi}_1 - M_{\text{сопр}_{O_1}} - m_2 \ddot{y}_{C_2} x_{C_2} + m_2 \ddot{x}_{C_2} y_{C_2} - J_{C_2} \ddot{\phi}_2 - M_{\text{сопр}_{O_2}} - \\ & - m_3 \ddot{y}_{C_3} x_{C_3} + m_3 \ddot{x}_{C_3} y_{C_3} - J_{C_3} \ddot{\phi}_3 - M_{\text{сопр}_{O_3}} = 0; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} & -M_{\text{тр}21} - m_2 \ddot{y}_{C_2} (x_{C_2} - x_{O_2}) + m_2 \ddot{x}_{C_2} (y_{C_2} - y_{O_2}) - J_{C_2} \ddot{\phi}_2 - M_{\text{сопр}_{O_2}} - \\ & - m_3 \ddot{y}_{C_3} (x_{C_3} - x_{O_2}) + m_3 \ddot{x}_{C_3} (y_{C_3} - y_{O_2}) - J_{C_3} \ddot{\phi}_3 - M_{\text{сопр}_{O_3}} = 0; \end{aligned} \quad (20)$$

$$-M_{\text{тр}32} - m_3 \ddot{y}_{C_3} (x_{C_3} - x_{O_3}) + m_3 \ddot{x}_{C_3} (y_{C_3} - y_{O_3}) - J_{C_3} \ddot{\phi}_3 - M_{\text{сопр}_{O_3}} = 0. \quad (21)$$

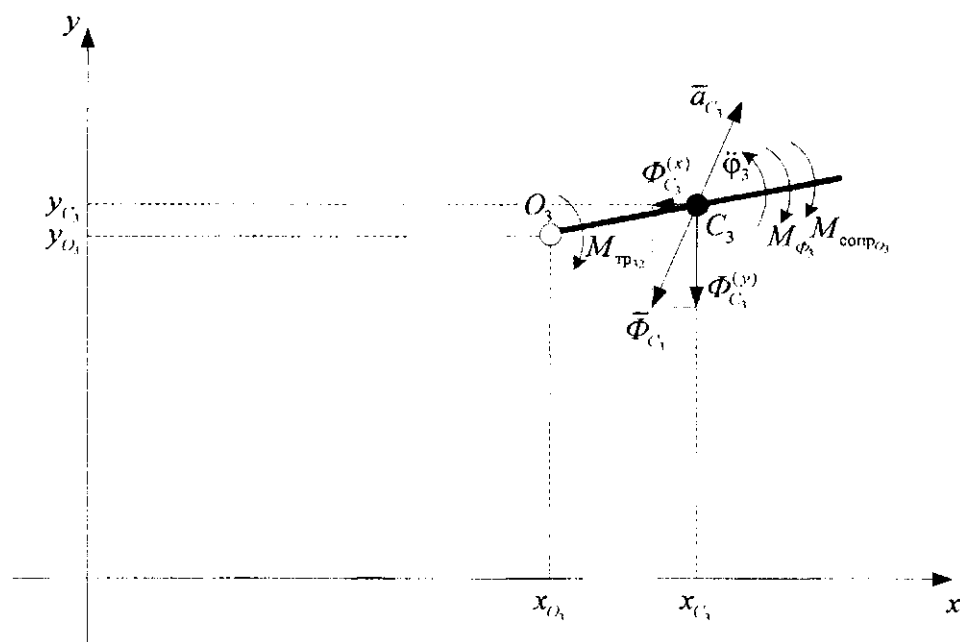


Рисунок 6 – Расчетная схема для составления уравнения движения относительно точки O_3

Для рассматриваемой модели механической системы, показанной на рисунке 1, по выражению (22) определим координаты центров масс первого, второго и третьего звена, а по выражению (23) – координаты шарниров.

$$\left. \begin{aligned} x_{C_1} &= 0, \\ y_{C_1} &= 0, \\ x_{C_2} &= L_1 \cos \varphi_1 + S_2 \cos \varphi_2, \\ y_{C_2} &= L_1 \sin \varphi_1 + S_2 \sin \varphi_2, \\ x_{C_3} &= L_1 \cos \varphi_1 + L_2 \cos \varphi_2 + S_3 \cos \varphi_3, \\ y_{C_3} &= L_1 \sin \varphi_1 + L_2 \sin \varphi_2 + S_3 \sin \varphi_3. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} x_{O_1} &= 0, \\ y_{O_1} &= 0, \\ x_{O_2} &= L_1 \cos \varphi_1, \\ y_{O_2} &= L_1 \sin \varphi_1, \\ x_{O_3} &= L_1 \cos \varphi_1 + L_2 \cos \varphi_2, \\ y_{O_3} &= L_1 \sin \varphi_1 + L_2 \sin \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

По выражению (24) определим проекции линейных ускорений центров масс первого, второго и третьего звена. С этой целью дважды дифференцируя уравнения координат центров масс (22) получим:

$$\left. \begin{aligned}
 \ddot{x}_{C_1} &= 0, \\
 \ddot{y}_{C_1} &= 0, \\
 \ddot{x}_{C_2} &= -L_1\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - L_1\dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 - S_2\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 - S_2\dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2, \\
 \ddot{y}_{C_2} &= L_1\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - L_1\dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 + S_2\ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 - S_2\dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2, \\
 \ddot{x}_{C_3} &= -L_1\ddot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - L_1\dot{\varphi}_1^2 \cos \varphi_1 - L_2\ddot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 - L_2\dot{\varphi}_2^2 \cos \varphi_2 - \\
 &\quad - S_3\ddot{\varphi}_3 \sin \varphi_3 - S_3\dot{\varphi}_3^2 \cos \varphi_3, \\
 \ddot{y}_{C_3} &= L_1\ddot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 - L_1\dot{\varphi}_1^2 \sin \varphi_1 + L_2\ddot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 - L_2\dot{\varphi}_2^2 \sin \varphi_2 + \\
 &\quad + S_3\ddot{\varphi}_3 \cos \varphi_3 - S_3\dot{\varphi}_3^2 \sin \varphi_3.
 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Подставив уравнения (22–24) в уравнения (19–21) и сделав необходимые преобразования, получим уравнения движения ударных элементов модели механической системы, показанной на рисунке 1. Соответственно для схем, изображенных на рисунках 2, 5 и 6, имеем:

$$M_{\dot{\varphi}_1} = M_{\text{сопр}_{\varphi_1}} + M_{\text{сопр}_{\varphi_2}} + M_{\text{сопр}_{\varphi_3}} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ji} \ddot{\varphi}_i \cos(\varphi_i - \varphi_j) - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 A_{ji} \dot{\varphi}_i^2 \sin(\varphi_i - \varphi_j); \quad (25)$$

$$M_{\text{сопр}_{\varphi_2}} = -M_{\text{тр}_{21}} - M_{\text{сопр}_{\varphi_3}} - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^3 A_{ji} \ddot{\varphi}_i \cos(\varphi_i - \varphi_j) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=2}^3 A_{ji} \dot{\varphi}_i^2 \sin(\varphi_i - \varphi_j); \quad (26)$$

$$M_{\text{сопр}_{\varphi_3}} = -M_{\text{тр}_{32}} - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=3}^3 A_{ji} \ddot{\varphi}_i \cos(\varphi_i - \varphi_j) + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=3}^3 A_{ji} \dot{\varphi}_i^2 \sin(\varphi_i - \varphi_j). \quad (27)$$

В уравнениях (25–27) $A_{ji} = \text{const}$ – коэффициенты при тригонометрических функциях, где $i > 0$. Здесь i, j – буквенные индексы, соответствующие цифровым индексам коэффициентов A_{ji} .

Анализ уравнений (25–27) показывает, что матрица, составленная из коэффициентов A_{ji} , является квадратной (симметричной). По причине равенства симметричных элементов относительно главной диагонали имеем (при $j > i$) коэффициенты $A_{ji} = A_{ij}$, которые равны:

$$A_{11} = J_{C_1} + (m_2 + m_3)L_1^2,$$

$$A_{12} = (m_2S_2 + m_3L_2)L_1,$$

$$A_{13} = m_3S_3L_1,$$

$$A_{22} = J_{C_2} + m_2S_2^2 + m_3L_2^2,$$

$$A_{23} = m_3S_3L_2,$$

$$A_{33} = J_{C_3} + m_3S_3^2.$$

Уравнения представлены в такой форме, что в них разделены постоянные параметры A_{ji} , независимые от движения ударных элементов, и параметры $\varphi, \dot{\varphi}$ и $\ddot{\varphi}$, изменяемые во времени в процессе работы измельчителя.

Решение системы уравнений (25–27) возможно при задании начальных и граничных условий, которые можно решать как относительно левой, так и правой части. В связи с этим, в зависимости от поставленной задачи, начальные и граничные условия будут различаться.

В качестве граничных или краевых условий должны быть заданы законы распределения сил сопротивления движению по длине каждого звена. Численное решение системы уравнений возможно с помощью пакета прикладных программ MathCAD.

Заключение

Составлена расчетная схема динамики движения и получены уравнения движения ударных элементов измельчителя относительно ее кинематических пар на основе метода кинестатики, позволившего учесть все силовые факторы, воздействующие на трехзвенную систему. Предложенные уравнения позволяют в зависимости от поставленной задачи, начальных и граничных условий исследовать процесс ударного разрушения измельчаемого материала и определять текущее положение, углы, скорости и ускорения любой составляющей части звена ударного элемента в любой момент времени.

Литература

- 1 Артоболевский, И.И. Теория механизмов и машин: учеб. для вузов / И.И. Артоболевский. – М.: Наука, 1988. – 640 с.
- 2 Левитский, Н.И. Теория механизмов и машин / Н.И. Левитский. – М.: Высшая школа, 1990. – 592 с.
- 3 Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики: учеб. для машиностроит. и приборостроит. спец. вузов / Н.Н. Никитин. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1990. – 607 с.
- 4 Бутенин, Н.В. Введение в аналитическую механику / Н.В. Бутенин. – М.: Наука, 1971. – 264 с.
- 5 Добронравов, В.В. Курс теоретической механики / В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин, А.Л. Дворников. – М.: Высшая школа, 1974. – 528 с.
- 6 Степин, П.А. Сопротивление материалов / П.А. Степин. – 8-е изд. М.: Высшая школа, 1988. – 367 с.
- 7 Пановко, Я.Г. Введение в теорию механических колебаний / Я.Г. Пановко. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1991. – 256 с.
- 8 Пановко, Я.Г. Основы прикладной теории колебания и удара / Я.Г. Пановко. – 3-е изд., перераб. и доп. - Л.: Машиностроение (Ленингр. отделение), 1976. – 320 с.
- 9 Снитко, Н.К. Строительная механика / Н.К. Снитко. – М.: Высшая школа, 1980. – 432 с.
- 10 Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М.: Высшая школа, 1986. – 416 с.
- 11 Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: в 2 т. / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон; под общ. ред. Г.Ю. Джанелидзе и Д.Р. Меркина. - М.: Наука, 1990. – Т. 1. – 672 с.
- 12 Бать, М. И. Теоретическая механика в примерах и задачах: в 2 т. / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон; под общ. ред. Г.Ю. Джанелидзе и Д.Р. Меркина. – М.: Наука, 1991. – Т. 2. – 640 с.
- 13 Левитский, Н.И. Колебания в механизмах / Н.И. Левитский. – М.: Наука, 1988. – 336 с.
- 14 Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов в 2 т. / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1968. – Т. 1: Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов. – 552 с.

Поступила в редакцию 16.12.2010