

ПРОЦЕССЫ, АППАРАТЫ И ОБОРУДОВАНИЕ ПИЩЕВЫХ ПРОИЗВОДСТВ

УДК 531.394

ДВИЖЕНИЕ СЫПУЧИХ ПИЩЕВЫХ МАТЕРИАЛОВ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А.Я. Протас, В.К. Лапковский

Исследовано движение сыпучих пищевых и других материалов сверху вниз по цилиндрической поверхности с трением. Теоретически определены условия, при которых возможно «зависание» материала внутри поверхности. Предложены формулы для проектных расчетов.

Введение

В жизни и технике движение сыпучих грузов по наклонной или криволинейной поверхности широко распространено. Это может быть перемещение зерна, строительных материалов, пищевых и других смесей и т.д. Для этих целей используются и криволинейные лотки, и цилиндрические поверхности, и даже трубопроводы. Наиболее существенными факторами, определяющими необходимость их использования, можно считать: уменьшение или исключение потерь материала, обеспечение непрерывности на технологической линии, минимизация износа поверхностей соприкосновения, а может быть, и времени перемещения [1].

Но в любом случае должно быть обеспечено полное отсутствие зависания материала, хотя в некоторых случаях возникают и другие вопросы. Например, зерно, свободно падающее в высокую емкость и касающееся ее стенки, приведет к износу этой стенки.

Движение материальных частиц по наклонным прямолинейным лоткам достаточно изучено [2,3] и, как правило, вопросов не вызывает. Но вот исследование движения по цилиндрической поверхности сильно упрощается, когда рассматривается без учета трения скольжения. Введение же дополнительной силы, т.е. трения, переводит задачу в более практическое русло, но с одновременным ее усложнением.

При этом движение частиц вниз по вогнутому лотку ведет к одним эффектам, а по выпуклому – совсем к другим. Само собой разумеется, что сюда добавляется еще один случай – движение частиц материала по вогнутому лотку вверх, которое без начальной скорости направленной вверх невозможно вообще.

Результаты исследований и их обсуждение

Поэтому поставим задачу проанализировать динамически движение материальной частицы вниз по криволинейной цилиндрической поверхности постоянного радиуса с учетом трения скольжения. Сопротивление воздуха учитывать не будем.

Примем в качестве расчетной схему, представленную на рисунке 1. Будем считать, что нам заранее известны: масса материальной точки m , радиус окружности цилиндрической

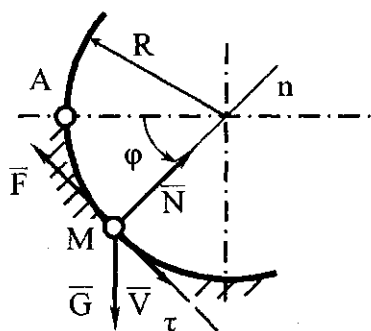


Рисунок 1 – Расчетная схема

по поверхности R, начальное положение точки M, определяемое углом φ_0 , начальная скорость движения V_0 или соответствующая ей угловая скорость ω_0 , направленная против хода часовой стрелки. Кроме этого, будем считать, что величина силы трения скольжения линейно взаимосвязана с коэффициентом трения f.

Оценку движения будем осуществлять с помощью естественных осей координат «n» и «τ», перемещающихся вместе с точкой.

Тогда дифференциальные уравнения движения точечного груза в проекциях на оси «τ» и «n» будут иметь вид:

$$m\ddot{s} = G \cos \varphi - F; \quad (1)$$

$$m \frac{\dot{s}^2}{R} = N - G \sin \varphi, \quad (2)$$

- где m – масса частицы;
- G – сила тяжести;
- F – сила трения скольжения;
- N – нормальная реакция поверхности лотка;
- s – криволинейная координата движущейся частицы (точки) M.

Если угол φ измерять в радианах (от горизонтали), то с криволинейной координатой s он жестко взаимосвязан соотношением, определяемым постоянством радиуса R, т.е.

$$s = R\varphi.$$

Поэтому

$$\dot{s} = R\dot{\varphi}; \quad \ddot{s} = R\ddot{\varphi}.$$

Подставляя эти выражения в формулы (1), (2), получим

$$mR\ddot{\varphi} = mg \cos \varphi - F; \quad (3)$$

$$mR\dot{\varphi}^2 = N - mg \sin \varphi. \quad (4)$$

Так как по закону Кулона максимальная сила трения скольжения выражается как $F = fN$,

то уравнения (3) и (4) преобразуются в дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{\varphi} + f\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{R}(\cos \varphi - f \sin \varphi). \quad (5)$$

Таким образом, имеем нелинейное дифференциальное уравнение, описывающее движение материальной частицы по шероховатой цилиндрической поверхности, учитывающее действие силы тяжести и силы трения скольжения.

Будем считать, что начальные условия движения определяются величинами φ_0 и $\dot{\varphi}_0$, а параметры f, g, R остаются постоянными.

Для решения дифференциального уравнения (5) введем замену переменных [4], т.е. примем, что

$$\dot{\varphi}(t) = p(\varphi).$$

Тогда

$$\ddot{\varphi}(t) = \frac{dp}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dp}{d\varphi} \cdot p = p' \cdot p$$

и уравнение (5) может быть представлено в виде

$$p' \cdot p + fp^2 = \frac{g}{R} (\cos \varphi - f \sin \varphi). \quad (6)$$

Теперь воспользуемся новой переменной $z=z(\varphi)$, считая, что

$$z = p^2.$$

Тогда

$$z' = 2p \cdot p'$$

и уравнение (6) можно записать в виде

$$z' + 2fz = \frac{2g}{R} (\cos \varphi - f \sin \varphi). \quad (7)$$

Пусть $z=u \cdot v$, где

$$u=u(\varphi); \quad v=v(\varphi).$$

Так как

$$z' = u' \cdot v + u \cdot v',$$

то уравнение (7) можно представить в виде

$$u' \cdot v + u(v' + 2fv) = \frac{2g}{R} (\cos \varphi - f \sin \varphi). \quad (8)$$

Решение уравнения (8) будем искать в предположении, что

$$v' + 2fv = 0.$$

Откуда следует, что

$$\frac{dv}{d\varphi} = -2fv.$$

А после интегрирования с учетом начальных условий получим

$$v = v_0 e^{-2f(\varphi - \varphi_0)}. \quad (9)$$

Теперь уравнение (8) можно записать в виде

$$\frac{du}{d\varphi} v_0 e^{-2f(\varphi - \varphi_0)} = \frac{2g}{R} (\cos \varphi - f \sin \varphi)$$

и проинтегрировать:

$$\begin{aligned} v_0 \int_{u_0}^u du &= \frac{2g}{R} \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{2f(\varphi - \varphi_0)} (\cos \varphi - f \sin \varphi) d\varphi = \\ &= \frac{2g}{R e^{2f\varphi_0}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{2f\varphi} \cos \varphi d\varphi - \frac{2gf}{R e^{2f\varphi_0}} \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{2f\varphi} \sin \varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (10)$$

Опираясь на данные [6 с. 379], по выражению (10) получим:

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{2f\varphi} \cos \varphi d\varphi = \frac{e^{2f\varphi}}{4f^2 + 1} (2f \cos \varphi + \sin \varphi) - \frac{e^{2f\varphi_0}}{4f^2 + 1} (2f \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0);$$

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{2f\varphi} \sin \varphi d\varphi = \frac{e^{2f\varphi}}{4f^2 + 1} (2f \sin \varphi - \cos \varphi) - \frac{e^{2f\varphi_0}}{4f^2 + 1} (2f \sin \varphi_0 - \cos \varphi_0).$$

Взяв соответствующие интегралы и произведя группировку, будем иметь

$$u_{H0} - u_0 n_0 = A[e^{2f(\varphi-\varphi_0)} \cdot B - D], \quad (11)$$

где

$$A = \frac{2g}{R(4f^2 + 1)};$$

$$B = (1 - 2f^2) \sin \varphi + 3f \cos \varphi;$$

$$D = (1 - 2f^2) \sin \varphi_0 + 3f \cos \varphi_0.$$

Возвращаясь к изначально принятым переменным, по выражению (11) получим

$$\dot{\varphi}^2 = z = A \cdot [B - De^{-2f(\varphi-\varphi_0)}] + \dot{\varphi}_0^2 \cdot e^{-2f(\varphi-\varphi_0)}.$$

Или, что то же самое:

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{A \cdot [B - De^{-2f(\varphi-\varphi_0)}] + \dot{\varphi}_0^2 \cdot e^{-2f(\varphi-\varphi_0)}}. \quad (12)$$

Учитывая, что коэффициенты А и D постоянны, а величина «В» является переменной, выражение (12) можно представить в виде

$$\dot{\varphi} = \sqrt{A \cdot [(1 - 2f^2) \sin \varphi + 3f \cos \varphi - De^{-2f(\varphi-\varphi_0)}] + \dot{\varphi}_0^2 \cdot e^{-2f(\varphi-\varphi_0)}}. \quad (13)$$

Но для точечного груза удобнее оперировать с линейной скоростью V. Поэтому, умножив на радиус R левую и правую части формулы (13), получим

$$V = \dot{\varphi}R = R \sqrt{A \cdot [(1 - 2f^2) \sin \varphi + 3f \cos \varphi - De^{-2f(\varphi-\varphi_0)}] + \dot{\varphi}_0^2 \cdot e^{-2f(\varphi-\varphi_0)}}. \quad (14)$$

Для дальнейшего анализа требуется конкретизировать начальные условия движения. Отсчет угла φ лучше всего вести от горизонтали, проходящей через центр круга, как показано на рис. 1. Тогда можно принять, что $\varphi_0 = 0$, поскольку движение в верхней части круга имеет свои специфические особенности и его нужно изучать отдельно. Можно принять также, что и V_0 равно нулю, так как в этом случае будут создаваться худшие условия для зависания материала.

Тогда формулу (14) с учетом принятых значений А и D можно представить в виде

$$V = \sqrt{\frac{2gR}{4f^2 + 1} \cdot [(1 - 2f^2) \sin \varphi + 3f \cos \varphi - 3fe^{-2f\varphi}]} \quad (15)$$

В зависимости от величины радиуса R, коэффициента f и угла φ подкоренное выражение в формуле (15) может принимать и положительные, и отрицательные значения.

При каких условиях скорость V примет точно нулевое значение может дать только численный расчет. Мнимое число тогда будет означать, что движение прекратилось (отсутствует). Поэтому для конкретных расчетов угол φ будем изменять в пределах от 0^0 до

180° , коэффициент трения f ограничим значением 0,7, а для радиуса R примем величину, например, 1,0 м.

В этом случае формула (15) преобразуется к виду

$$V = \sqrt{\frac{2g}{4f^2 + 1} \cdot [(1 - 2f^2) \sin \varphi + 3f \cos \varphi - 3fe^{-2f\varphi}]}. \quad (16)$$

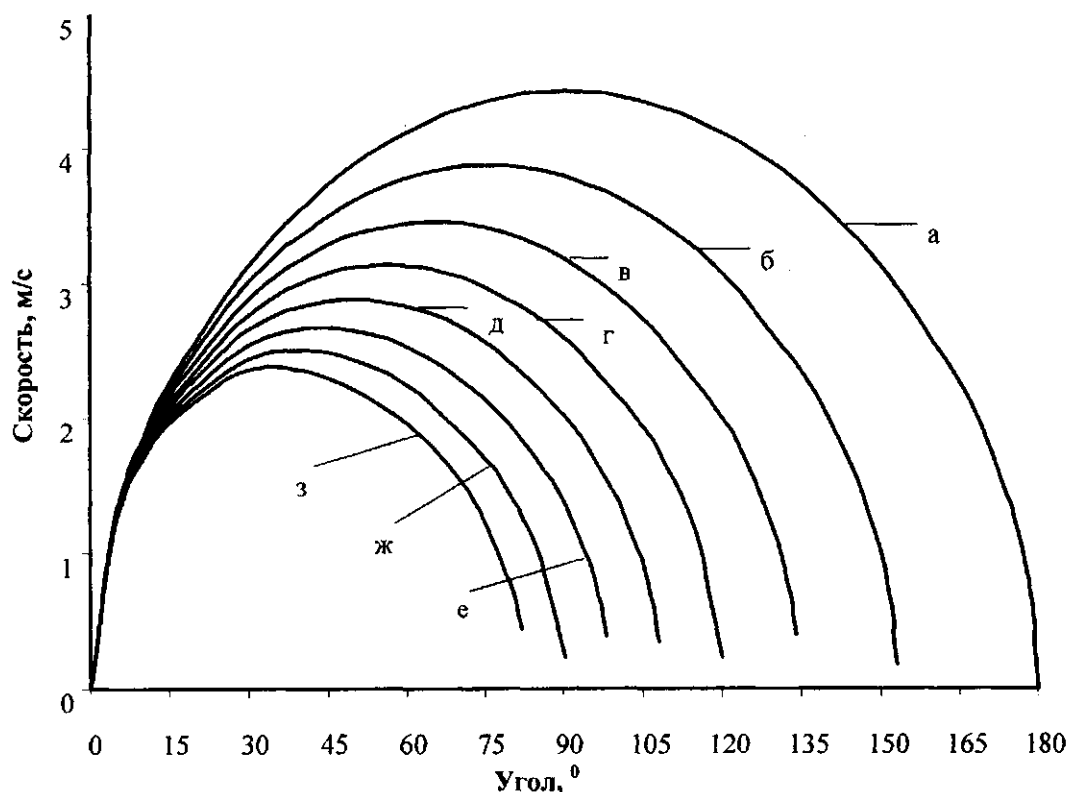
При других значениях R все итоговые результаты изменятся пропорционально, поэтому произведем расчет скорости, развиваемой точечным грузом по формуле (16), а результаты представим на рисунке 2.

По вертикали отложена скорость движения в метрах на секунду, по горизонтали – угол φ в градусах, при этом для расчетов взят полукруг ($\varphi = 0-180^\circ$), так как при нулевой начальной скорости движение дальше невозможно ни при каких условиях.

Данные расчета показывают, что при коэффициенте трения 0,2 груз практически не достигает угла в 135° , а при $f=0,5$ он едва преодолевает нижнюю точку, а при $f=0,7$ вообще не доходит до 90° (зависает).

В начале движения до угла $\varphi = 30^\circ$ разница по скоростям во всех случаях незначительна, что вполне объясняется малым значением нормального давления поверхности и, следовательно, малой величиной силы трения. А вот при коэффициенте $f=0,2$ и выше влияние трения оказывается весьма существенным. Все это означает, что для определения конкретных параметров подобного цилиндрического лотка необходим предварительный расчет.

При уменьшении радиуса цилиндрической поверхности, как видно по формуле (15), произойдет пропорциональное уменьшение скорости во всех случаях, но выход на нулевые значения останется при тех углах φ . Поэтому картина останется такой же, как представлено на рисунке 2.



а → $f=0$; б → $f=0,1$; в → $f=0,2$; г → $f=0,3$; д → $f=0,4$; е → $f=0,5$; ж → $f=0,6$; з → $f=0,7$

Рисунок 2 – Зависимость скорости движения точечного груза по цилиндрической поверхности от угла φ при различных коэффициентах трения

А вот при наличии начальной скорости не равной нулю движущийся точечный груз будет достигать больших углов φ . Поэтому с позиций его «зависания» картина, представленная на рисунке 2, отражает наихудшее положение. Тем не менее, для случаев, когда V_0 больше нуля, а радиус поверхности отличен от взятого в расчет 1 метра, формулу для расчетов можно получить из выражения (14), введя в нее значения А и Д. При условии, что $\varphi_0 = 0$ она будет иметь вид

$$V = \sqrt{\frac{2gR}{4f^2 + 1} \cdot [(1 - 2f^2) \sin \varphi + 3f \cos \varphi - 3fe^{-2f\varphi}] + V_0^2 \cdot e^{-2f\varphi}}. \quad (17)$$

Таким образом, «зависанию» сыпучего материала движущегося по круговому лотку или цилиндрической поверхности будет содействовать:

- силы трения скольжения материала при коэффициентах f выше 0,1–0,2;
- нулевая или очень низкая начальная скорость движения;
- увеличение угла лотка для каких-либо целей более 90° .

Располагая величиной коэффициента трения f и радиусом R , проверочные расчеты могут быть выполнены по приведенной выше формуле (15). Если же имеется и начальная скорость V_0 , то следует использовать и формулу (17).

Заключение

Показано, что самые благоприятные условия для «зависания» движущегося вниз груза создаются при отсутствии или очень малой начальной скорости и достаточно большом коэффициенте трения скольжения даже при углах φ менее 90° . При коэффициентах трения скольжения выше 0,1–0,2 для направляющих, лотков, зернопроводов и других криволинейных поверхностей цилиндрического типа должен проводиться расчет скорости движения груза вниз от возможного зависания. Получены соответствующие зависимости.

Литература

- 1 Интенсификация процессов переработки пищевого сырья, совершенствование конструкций и методов расчета основного технологического оборудования для пищевой промышленности. Отчет по НИР кафедры прикладной механики УО «МГУП». Номер государственной регистрации 2006748 от 21.04.2006г. Депонирован в ГУ «БелИСА», 2011г. – 125 с.
- 2 Добронравов В.В., Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. – М.: Высш. школа, 1983. – 575 с.
- 3 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике/Под ред. А.А.Яблонского. – М.: Высшая школа, 1985. – 387с.
- 4 Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. – М.: Наук, 1964. – 354 с.

Поступила в редакцию 7.04.2011