

## ДВИЖЕНИЕ СЫПУЧИХ ПИЩЕВЫХ МАТЕРИАЛОВ ВВЕРХ ПО ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ТРИЕРНЫМ ЭФФЕКТОМ

*А.Я.Протас, В.К. Лапковский*

Изложены результаты теоретических исследований движения сыпучих пищевых и других материалов вверх по цилиндрической поверхности с трением. Показано, при каких условиях материал будет проходить вверх без отрыва от цилиндрической поверхности, а когда будет иметь место отрыв от нес. Для практических расчетов предложены аналитические зависимости.

### Введение

Движение сыпучих грузов по криволинейной поверхности может осуществляться как вниз, так и вверх, в зависимости от технологической необходимости. Например, зерно может перемещаться вниз по криволинейному лотку, но оно может двигаться вверх по криволинейной трубе. Сыпучая пищевая масса, если ее перемешивать ротором в горизонтально расположенном цилиндре, будет совершать сложное движение, при этом часть материала, соприкасающаяся с цилиндрической поверхностью, также вынуждена двигаться вверх.

Несколько иначе выглядит перемещение зерна в триерных машинах, где для зернышек предусмотрены ячейки в самой цилиндрической поверхности, но движение массы происходит вверх. Мало этого, после «освобождения» от ячейки зернышки продолжают движение, но без контакта с поверхностью, как это и предусмотрено принципом работы машины.

Подобный процесс имеет место не только при перемещении пищевых материалов. Например, в сельском хозяйстве при уборке с поля зеленой массы она измельчается машиной и подается вверх по криволинейному желобу в кузов транспортного средства. Аналогичный принцип используется и в некоторых снегоуборочных машинах, которые отбрасывают снег вверх и в сторону, используя криволинейную направляющую.

Во всех подобных случаях движение вверх совершенно невозможно без начальной скорости. А при наличии этой скорости движущийся материал может достигнуть самой верхней точки неподвижной цилиндрической поверхности и даже двигаться дальше или оторваться от поверхности, не достигнув верхнего положения. В первом случае материал можно по направляющему лотку или другому устройству пустить в требуемое место за пределы участка цилиндрической поверхности, во втором – он продолжит движение в виде «свободного падения», оставаясь внутри цилиндрической поверхности. В последнем случае получится самый настоящий «триерный эффект».

При отсутствии трения анализ такого движения по криволинейной поверхности особого труда не представляет и с успехом осуществляется в курсе теоретической механики [1,2], правда, если радиус кривизны поверхности остается неизменным. При наличии трения скольжения вопрос серьезно усложняется, как это показано для движения сыпучего материала вниз по аналогичной поверхности [3,4].

### Результаты исследований и их обсуждение

Исходя из изложенного, задача сводится к динамическому анализу движения материальной частицы вверх по криволинейной цилиндрической поверхности постоянного радиуса с учетом трения скольжения. Спротивлением воздуха будем пренебрегать.

Примем в качестве расчетной схему, представленную на рисунке 1. Будем считать, что нам заранее известны: масса материальной точки  $m$ , радиус окружности цилиндрической поверхности  $R$  и начальная скорость движения  $V_0$ , направленная вверх. Кроме этого,

примем, что величина силы трения скольжения линейно взаимосвязана с коэффициентом трения  $f$ , как следует из широко известного закона Кулона.

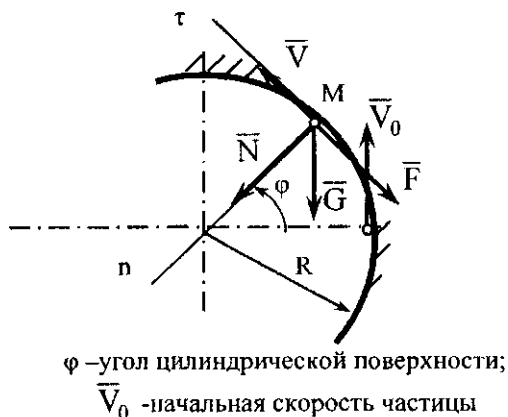


Рисунок 1- Расчетная схема

Оценку движения будем осуществлять с помощью подвижных естественных осей координат « $n$ » и « $\tau$ », а также угла  $\varphi$ . Начальное положение движущейся точки  $M$  возьмем на горизонтали, для которой угол  $\varphi_0 = 0$ . Можно было бы начало отсчета по углу  $\varphi$  взять и на вертикали, но это оказалось бы менее удобным. Таким образом, имея начальную скорость  $V_0$ , точечный груз  $M$  движется вверх, преодолевая силу тяжести  $G$  и силу трения скольжения  $F$ . Кроме этого, на него может действовать и нормальная реакция поверхности  $N$ , влияющая на величину силы трения.

Тогда дифференциальные уравнения движения точечного груза в проекциях на естественные оси координат « $\tau$ » и « $n$ » будут иметь вид:

$$m\ddot{s} = -G \cos \varphi - F; \tag{1}$$

$$m \frac{\dot{s}^2}{R} = N + G \sin \varphi, \tag{2}$$

где  $s$  – криволинейная координата движущегося точечного груза  $M$ . Так как радиус цилиндрической поверхности  $R$  принят неизменным, то

$$s = R\varphi; \quad \dot{s} = R\dot{\varphi}; \quad \ddot{s} = R\ddot{\varphi}.$$

Перейдя к переменной  $\varphi$ , получим

$$mR\ddot{\varphi} = -mg \cos \varphi - F \tag{3}$$

$$mR\dot{\varphi}^2 = N + mg \sin \varphi \tag{4}$$

Выражая силу трения по закону Кулона как

$$F = fN,$$

и используя уравнение (4) для определения нормального давления  $N$ , по уравнению (3) получим

$$\ddot{\varphi} + f\dot{\varphi}^2 = -\frac{g}{R}(\cos \varphi - f \sin \varphi), \tag{5}$$

где,  $g$  – ускорение свободного падения;  
 $f$  – коэффициент трения скольжения.

Таким образом, уравнение (5) отличается от полученного ранее [3,4] всего лишь знаком правой части, хотя используемый угол  $\varphi$  должен отсчитываться от нулевого значения. Поэтому, введя замену переменной

$$\dot{\varphi}(t) = p(\varphi),$$

а затем

$$z = p^2$$

и считая, что

$$z = u \times v,$$

где

$$u = u(\varphi); \quad v = v(\varphi),$$

приходим к уравнению вида

$$u' \cdot v + u(v' + 2fv) = -\frac{2g}{R}(\cos \varphi - f \sin \varphi). \quad (6)$$

После интегрирования в предположении, что

$$v' + 2fv = 0$$

и подстановки начальных условий ( $\varphi = \varphi_0 = 0$ ,  $V = V_0$ ) получим

$$V = \sqrt{V_0^2 e^{-2f\varphi} - \frac{2gR}{4f^2 + 1} \cdot [(1 - 2f^2) \sin \varphi + 3f \cos \varphi - 3fc^{-2f\varphi}]}. \quad (7)$$

Как видно по выражению (7), скорость  $V$  может принимать действительные значения, если, как минимум,  $V_0 > 0$ , так как перед второй частью подкоренного выражения стоит знак минус. Например, при отсутствии трения скольжения ( $f=0$ ) формула приобретает вид

$$V = \sqrt{V_0^2 - 2gR \sin \varphi}. \quad (8)$$

При  $V_0 = 0$  будем иметь корень из отрицательного числа, что означает невозможность такого движения вообще. А далее вступают в силу другие факторы, одним из которых является наличие контакта с цилиндрической поверхностью, который может поддерживаться, но может и теряться. При каких условиях это произойдет?

Как следует из полученного выше уравнения (4), момент потери контакта, т. е. отрыва от поверхности может быть определен условием  $N = 0$ , а угол  $\varphi$ , при котором это произойдет, вытекает из выражения

$$\sin \varphi = \frac{R}{g} \varphi^2. \quad (9)$$

Это соответствует скорости в данной точке:

$$V = \sqrt{gR \sin \varphi}. \quad (10)$$

Если она окажется меньшей, то это означает, что точечный груз оторвался от поверхности раньше. Если же в данной точке скорость будет больше, чем определяет выражение (10), то груз будет двигаться дальше. В свою очередь, это означает, что при постоянных величинах  $R$  и  $g$  момент отрыва будет определяться только величиной фактической скорости движения груза с учетом трения скольжения или без него.

Таким образом, в зависимости от конкретных условий может достигаться «триерный» эффект, т.е. сначала движение осуществляется по цилиндрической поверхности до некоторого угла  $\varphi$ , затем точечный груз от нее отрывается, и движение продолжается как «свободное» под действием только силы тяжести.

Какова же должна быть начальная скорость  $V_0$ , чтобы груз достиг, не отрываясь от по-

верхности, точки, определяемой углом  $\varphi$ , и отрыв произошел в этой точке? Очевидно, свое отрицательное воздействие окажет сила трения скольжения, поэтому рассмотрим сначала движение без учета его воздействия.

Для изменения кинетической энергии точечного груза можем записать [1]

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = -mgR \sin \varphi.$$

Но так как скорость  $V$  должна соответствовать по выражению (10) скорости в момент отрыва, то начальная скорость  $V_0$  определится как

$$V_0 = \sqrt{3gR \sin \varphi}. \quad (11)$$

Для конкретной оценки радиус цилиндрической поверхности примем равным 1 м и произведем расчет по формулам (10) и (11). Скорость, при которой отрыв еще возможен, обозначим  $V_{от}$ , а соответствующую ей начальную скорость при  $\varphi = 0$  как  $V_0$ . Как видно из таблицы 1 и рисунка 2, если груз будет иметь начальную скорость 5,43 м/с, то он достигнет самой верхней точки ( $\varphi = 90^\circ$ ) без отрыва от поверхности, но его скорость уменьшится до 3,13 м/с. При меньшей начальной скорости отрыв произойдет раньше. Например, если начальная скорость будет составлять 4,56 м/с, то отрыв произойдет при угле  $\varphi = 45^\circ$  и скорости 2,63 м/с, а движение продолжится, но уже без контакта с поверхностью.

Таблица 1 – Зависимость скорости в момент отрыва  $V_{от}$  и соответствующей ей начальной скорости  $V_0$  от угла  $\varphi$  цилиндрической поверхности радиусом 1 м при отсутствии трения скольжения

| Угол $\varphi$ , град. |                    | 0                                | 5 | 10   | 15   | 30   | 45   | 60   | 75   | 90   |      |
|------------------------|--------------------|----------------------------------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Ско-<br>рость,<br>м/с  | В момент<br>отрыва | $V_{от} = \sqrt{g \sin \varphi}$ | 0 | 0,92 | 1,31 | 1,59 | 2,22 | 2,63 | 2,92 | 3,08 | 3,13 |
|                        | Начальная          | $V_0 = \sqrt{3g \sin \varphi}$   | 0 | 1,60 | 2,26 | 2,76 | 3,84 | 4,56 | 5,05 | 5,33 | 5,43 |

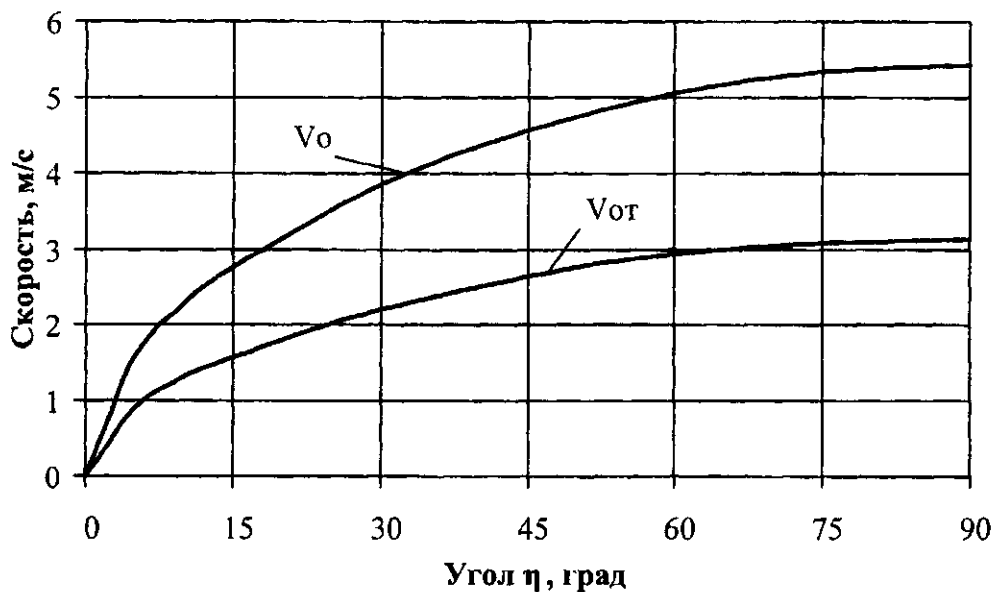


Рисунок 2 – Зависимость скорости в момент отрыва  $V_{от}$  и соответствующей ей начальной скорости  $V_0$  от угла цилиндрической поверхности  $\varphi$  при отсутствии трения скольжения (радиус поверхности  $R = 1$  м)

Таким образом, скорость движения будет изменяться в сторону уменьшения, но в зависимости от ее начальной величины контакт с цилиндрической поверхностью будет сохраняться или нарушаться. Поэтому представляет интерес выяснить, насколько существенными окажутся эти изменения при различной начальной скорости. Будем считать, что трение скольжения отсутствует, а радиус цилиндрической поверхности  $R$  равен 1 м.

Для выяснения этого вопроса произведем расчет скорости движения по формуле (8), задавая начальную скорость  $V_0$  от 3 до 9 м/с, а данные расчета представим на рис. 3.

Как видно из рисунка 3, при начальной скорости  $V_0$  равной 6 и более метров в секунду точечный груз достигнет самой высшей точки поверхности ( $\varphi=90^\circ$ ) и будет двигаться по ней дальше вниз или выйдет за пределы цилиндра в зависимости от конструкции устройства. А вот при меньшей начальной скорости отрыв от поверхности будет происходить раньше, хотя движение будет еще продолжаться, но уже без контакта с цилиндрической поверхностью. Для сравнения на рисунке 3 приведены данные по кривой отрыва, взятые из таблицы 1. Это означает, что нижняя кривая на рисунке 2 соответствует нижней кривой на рисунке 3, где явление так называемого «триерного эффекта» показано более наглядно.

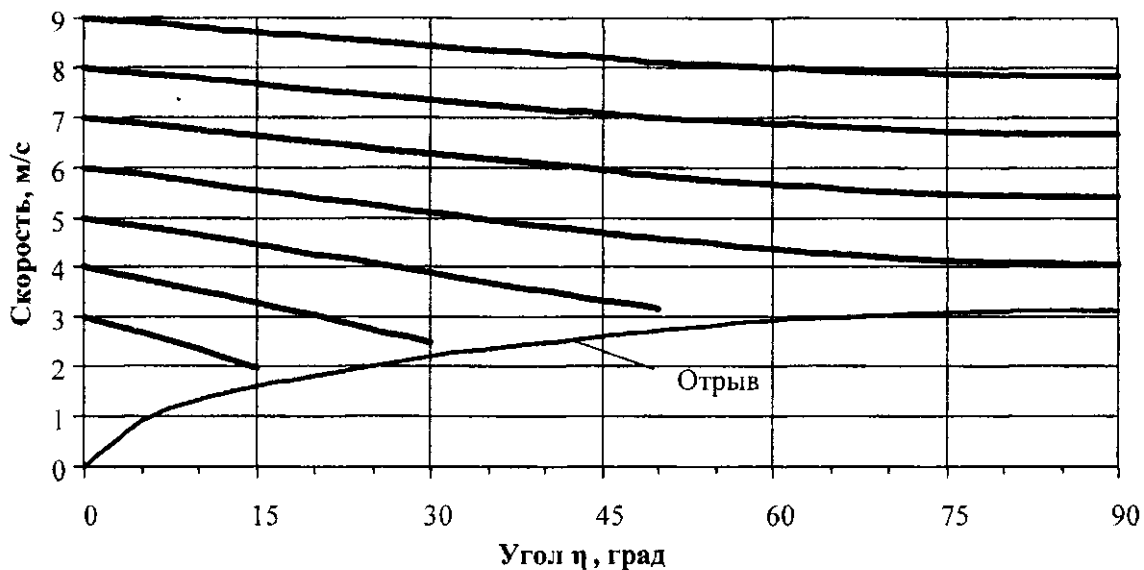


Рисунок 3 – Зависимость скорости точечного груза  $V$  от угла  $\varphi$  цилиндрической поверхности при различной начальной скорости  $V_0$  и отсутствии трения скольжения (радиус поверхности  $R = 1$  м)

Тот факт, что кривые изменения скорости несколько не доходят до кривой отрыва объясняется особенностями произведенных численных расчетов. В зависимости от конкретных условий отрыв от поверхности может происходить при углах  $\varphi$  от нуля практически до  $90^\circ$ . Например, для угла  $\varphi = 75^\circ$  скорость отрыва составляет 3,078 м/с, а по графику на рис. 3 видно, что при начальной скорости  $V_0 = 6$  м/с груз пройдет эту точку ( $\varphi = 75^\circ$ ) не отрываясь, а если начальная скорость составит 5 м/с, то отрыв произойдет даже раньше.

Все изложенное выше относится к случаю, когда радиус цилиндрической поверхности составляет 1 метр, а трение скольжения отсутствует. Что же изменится, если радиус цилиндра будет отличаться от этой величины? Прежде всего, изменится величина скорости отрыва, которая напрямую связана с радиусом  $R$ .

Произведем подсчет этой скорости по формуле (10) для нескольких значений  $R$  и данные сведем в таблицу 2.

Как видно по результатам расчетов, с уменьшением радиуса  $R$  так называемая скорость отрыва во всех случаях уменьшается. Это означает, что отрыв будет происходить при

меньшей начальной скорости. Будет это производить положительный или отрицательный эффект, зависит от конкретных условий, так как здесь, как и выше, не учитывается действие силы трения.

Таблица 2 – Влияние радиуса цилиндрической поверхности  $R$  и угла  $\varphi$  на величину скорости отрыва  $V_{от}$

| Угол $\varphi$ , град | 0              | 15   | 30   | 45   | 60   | 75   | 90   |
|-----------------------|----------------|------|------|------|------|------|------|
|                       | $V_{от}$ , м/с |      |      |      |      |      |      |
| $R = 0,4$ м           | 0              | 1,01 | 1,40 | 1,67 | 1,84 | 1,95 | 1,98 |
| $R = 0,5$ м           | 0              | 1,13 | 1,57 | 1,87 | 2,06 | 2,18 | 2,22 |
| $R = 0,7$ м           | 0              | 1,33 | 1,85 | 2,20 | 2,44 | 2,58 | 2,62 |
| $R = 1,0$ м           | 0              | 1,59 | 2,22 | 2,63 | 2,92 | 3,08 | 3,13 |

Поэтому вернемся к полученной ранее зависимости (7) скорости движения от угла  $\varphi$ , в которой учитывается не только коэффициент трения  $f$ , но и величина радиуса  $R$ . Как вытекает из формулы (7), зависимость скорости  $V$  от тех же факторов получается более сложной, но, тем не менее, допускает численный анализ. Поэтому произведем подсчет этой скорости в зависимости от угла  $\varphi$  для двух значений начальной скорости:  $V_0 = 9$  м/с и  $V_0 = 6$  м/с. А коэффициент трения скольжения  $f$  будем изменять от 0 до 0,5, приняв радиус цилиндрической поверхности  $R$  равным 1 м.

Данные расчетов, представленные на рисунке 4, показывают, что сила трения скольжения вносит весьма существенные изменения в картину движения точечного груза. Для большей наглядности здесь также приведена кривая отрыва.

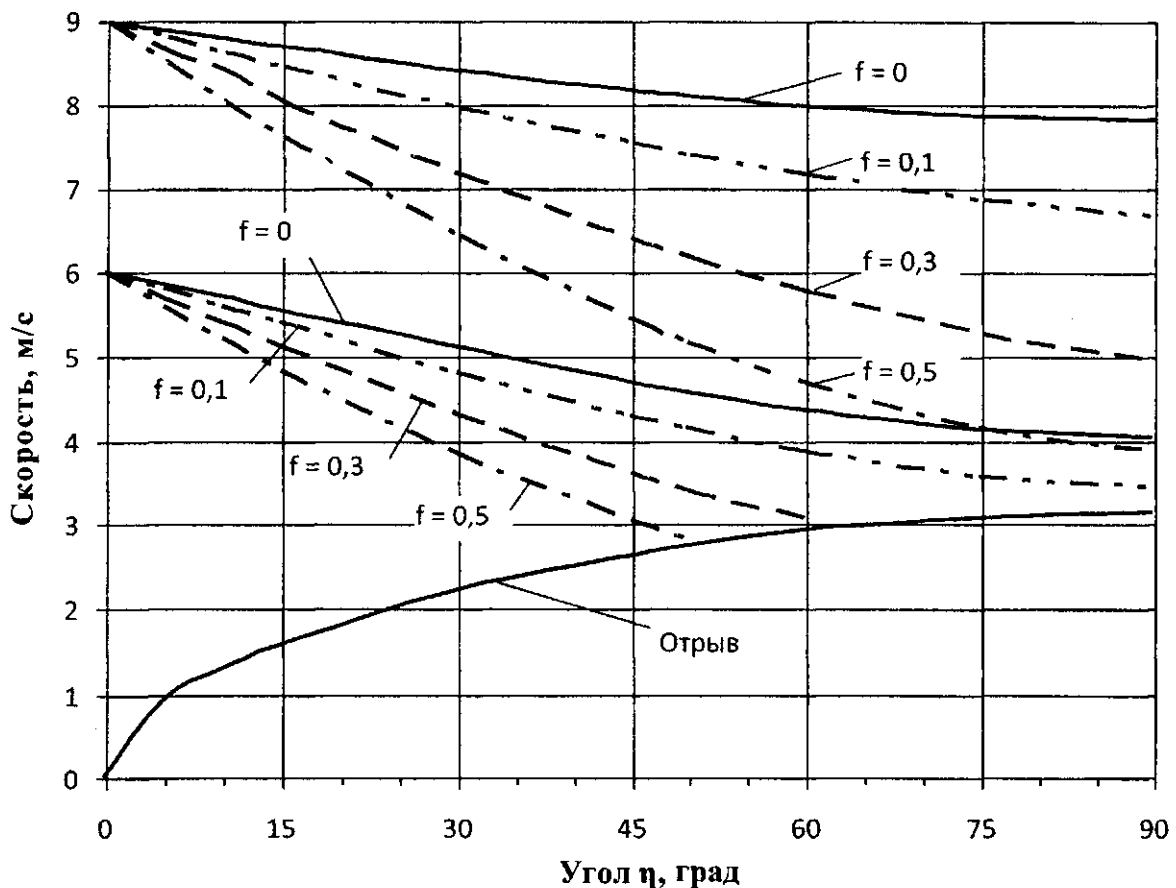


Рисунок 4 – Зависимость скорости движения  $V$  от угла  $\varphi$  цилиндрической поверхности при различных коэффициентах трения  $f$  и начальной скорости  $V_0$  (радиус поверхности  $R = 1$  м)

Если при малых углах  $\varphi$  уменьшение скорости движения незначительно, то к верхней точке оно уже становится существенным. Как видно из графиков, при коэффициенте трения скольжения  $f = 0,3$  и начальной скорости  $V_0 = 9$  м/с к верхней точке ( $\varphi = 90^\circ$ ) теряется около 4 м/с, т.е. почти половина. Зато при начальной скорости  $V_0 = 6$  м/с и тех же условиях точечный груз не дойдет до верхней точки, так как при угле  $\varphi$  несколько превышающем  $60^\circ$  произойдет его отрыв от цилиндрической поверхности..

При отсутствии трения скольжения и той же начальной скорости 6 м/с, как видно из рисунка 3, отрыва при угле  $\varphi = 60^\circ$  не происходит, а точечный груз достигает самой верхней точки.

Взятая в расчет величина радиуса цилиндрической поверхности, равная одному метру, несколько упростила численные расчеты, однако на практике эта величина может быть значительно меньшей, хотя не исключается и превышение этого значения. Поэтому произведем расчеты скорости движения по формуле (7), приняв величину радиуса  $R = 0,5$  м, а начальную скорость  $V_0$  уменьшим до 7 и 4 м/с.

Данные расчета, представленные на рисунке 5 показывают, что характер картины изменения скорости движения остается прежним. Вследствие действия силы трения и силы тяжести скорость движущегося груза уменьшается во всех случаях, но из-за уменьшения радиуса  $R$  уменьшается и скорость отрыва.

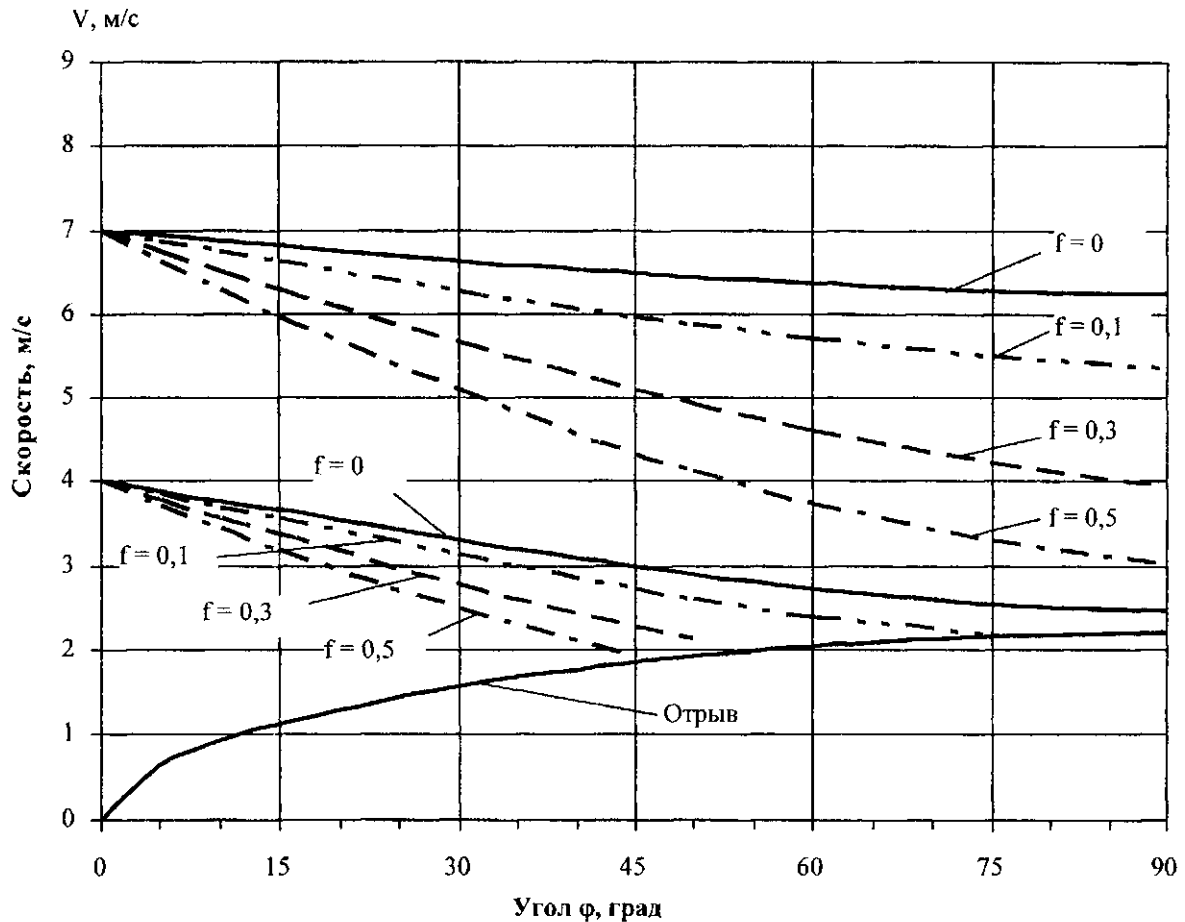


Рисунок 5 – Зависимость скорости движения  $V$  от угла  $\varphi$  цилиндрической поверхности при различных коэффициентах трения  $f$  и начальной скорости  $V_0$  (радиус поверхности  $R = 0,5$  м)

Например, при начальной скорости  $V_0$  равной 7 м/с и коэффициенте трения  $f = 0,3$  в самой верхней точке ( $\varphi = 90^\circ$ ) скорость оказывается равной только 3,96 м/с, но отрыва от поверхности не происходит. А вот при начальной скорости  $V_0 = 4$  м/с и том же коэффици-

енте трения  $f = 0,3$  скорость уменьшается до величины скорости отрыва при угле  $\varphi$ , меньше  $60^\circ$  и контакт с поверхностью теряется.

Из таблицы 2 и рисунков 4, 5 вытекает, что так называемая «кривая отрыва» с уменьшением радиуса цилиндрической поверхности опускается ниже, хотя вид ее остается прежним. Кроме этого, в зависимости от величины коэффициента трения  $f$  и начальной скорости  $V_0$  отрыв от цилиндрической поверхности происходит не всегда, а он взаимосвязан с определенной зоной параметров, к которым кроме уже названных  $V_0$  и  $f$  следует отнести и угол  $\varphi$  и радиус цилиндрической поверхности  $R$ .

### **Заключение**

Показано, что во всех случаях движения материала вверх по цилиндрической поверхности происходит уменьшение его скорости по сравнению с начальной величиной, и это уменьшение существенно возрастает с увеличением коэффициента трения скольжения. При определенных условиях может происходить отрыв движущихся частиц от поверхности по «триерному» типу, и каждой точке этой поверхности соответствует своя «скорость отрыва», не зависящая от трения скольжения. Для практических расчетов предложены аналитические зависимости, учитывающие как начальную скорость движения и радиус цилиндрической поверхности, так и коэффициент трения скольжения.

### **Литература**

- 1 Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики: учебник для машиностроительных и приборостроительных специальностей / Н.Н.Никитин. – М.: Высшая школа, 2003. – 720 с.
- 2 Протас, А.Я. Теоретическая механика. Программа курса, контрольные вопросы, задания для расчетно-графических, контрольных и самостоятельных работ, примеры решения: учебно-методическое пособие для студентов, магистрантов и обучающихся по индивидуальным планам / А.Я.Протас, Б.И.Игнатов. – Могилев: МГУП, 2010. – 119 с.
- 3 Интенсификация процессов переработки пищевого сырья, совершенствование конструкций и методов расчета основного технологического оборудования для пищевой промышленности. Отчет по НИР кафедры прикладной механики УО «МГУП». Номер государственной регистрации 2006748 от 21.04.2006г. Депонирован в ГУ «БелИСА», 2011г.
- 4 Протас, А. Я. Движение сыпучих пищевых материалов по цилиндрической поверхности / А.Я. Протас, В. К. Лапковский // Вестник Могилевского государственного университета продовольствия. – 2011.– № 1(10).– С.87.

*Поступила в редакцию 3.11.2011*