УДК 664.66+531.3

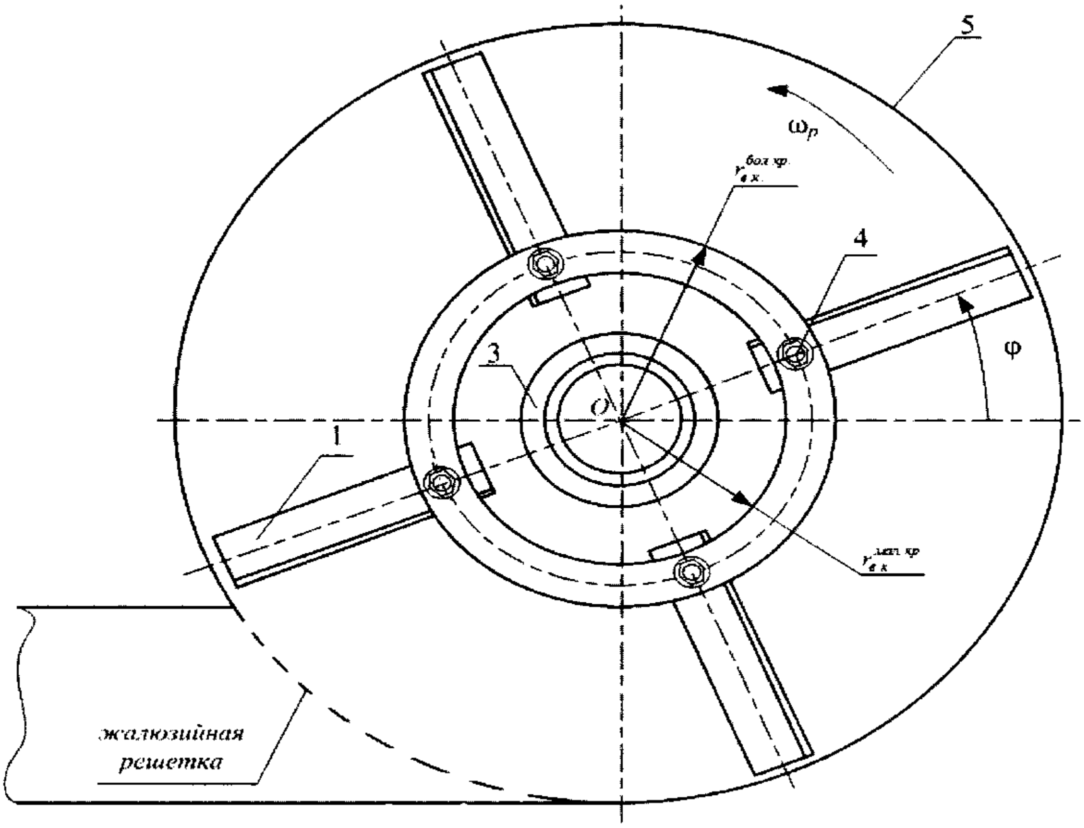
ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ ДВИЖЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ РОТОРНОГО ИЗМЕЛЬЧИТЕЛЯ В СУШИЛКЕ-ДИСПЕРГАТОРЕ

В.А. Шаршунов, А.В. Евдокимов, А.Е. Покатилов, В.Н. Попов

Рассмотрена задача построения математической модели процесса измельчения пророщенного зерна в сушилке-диспергаторе, основанная на методе Лагранжа. Метод позволяет получить уравнение движения механической системы в обобщенных координатах. Для решения поставленной задачи составлена расчетная схема однозвенной механической системы с указанием параметров, используемых при решении уравнения Лагранжа.

Введение

Рассмотрим движение ударных элементов роторного измельчителя до момента их взаимодействия (соударения) с частицей измельчаемого материала. На рисунке 1 показана схема модели движения ударных элементов роторного измельчителя.



1 – блок ножей механической системы; 2 – верхнее кольцо роторного измельчителя; 3 – нижнее кольцо роторного измельчителя; 4 – соединительный стержень (шпилька); 5 – корпус камеры сушилки-диспергатора

Рисунок 1 – Схема модели движения элементов роторного измельчителя

Модель, показанная на рисунке 1, представляет собой однозвенную незамкнутую кинематическую цепь, соединенную при помощи верхнего 2 и нижнего колец 3, и стержня шпильки 4 во вращающийся блок ножей 1. В конструкции колец 2 и 3 предусмотрены отверстия для стержней шпилек 4. В точке *O* находится ось вращения системы.

Выбор методики составления уравнений движения ударных элементов должен основываться на принципах универсальности, а само уравнение должно быть достаточно простым для численного решения.

Данным условиям соответствует уравнение Лагранжа второго рода, используемое для изучения движения любой механической системы с геометрическими или сводящимися к геометрическим (голономными) связями [1].

Целью данной работы является получение динамических уравнений движения роторного измельчителя на основе уравнения Лагранжа второго рода.

Результаты исследований и их обсуждение

Уравнение (1) представляет собой дифференциальное уравнение движения системы в обобщенных координатах, или уравнение Лагранжа.

Число уравнений Лагранжа определяется только числом степеней свободы системы и не зависит от количества тел, входящих в систему, ни от того, как эти тела движутся [1]. Число степеней свободы определяется по числу независимых возможных перемещений или по числу независимых координат [1]. Степень свободы рассматриваемой механической системы равна W=1, так как система имеет одно возможное перемещение в виде вращательного движения ротора.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}=Q \tag{1}$$

где T – кинетическая энергия системы;

q – обобщенная координата движения системы;

$\dot{q}$ – обобщенная скорость;

Q – обобщенная сила соответствующая координате q.

Для системы, совершающей вращательное движение, за обобщенную координату q примем угол поворота системы φ.

Кинетическая энергия системы T определяется как сумма кинетических энергий отдельных элементов механической системы по уравнению

$$T = zT_1^{\overset{\text{блока}}{\text{ножей}}} + T_2^{\overset{\text{верхнего}}{\text{кольца}}} + T_3^{\overset{\text{нижнего}}{\text{кольца}}} + zT_4^{\overset{\text{стержня}}{\text{шпильки}}} \tag{2}$$

где z – число блоков (пакетов) ножей в роторном измельчителе.

$$T_1^{\overset{\text{блока}}{\text{ножей}}} = kT_1^{\text{ножа}} \quad , \tag{3}$$

где k – число ножей в блоке.

Подставив уравнение (3) в уравнение (2) получим:

$$T = z\left(kT_1^{\text{ножа}}\right) + T_2^{\overset{\text{верхнего}}{\text{кольца}}} + T_3^{\overset{\text{нижнего}}{\text{кольца}}} + zT_4^{\overset{\text{стержня}}{\text{шпильки}}} \tag{4}$$

Для решения задачи составим расчетную схему однозвенной механической системы (рисунок 2).

Для принятой модели действительны следующие обозначения:

y, x, z – система координат с центром в точке O лежащей на оси вращения роторного измельчителя;

O_1 – положение центра отверстия в пластине ножа;

O_2 – положение центра масс пластины ножа без учета отверстия;
l –длина ножа;
a – расстояние от оси вращения механической системы до края пластины ножа;
c – расстояние от края пластины ножа до оси отверстия в ноже.

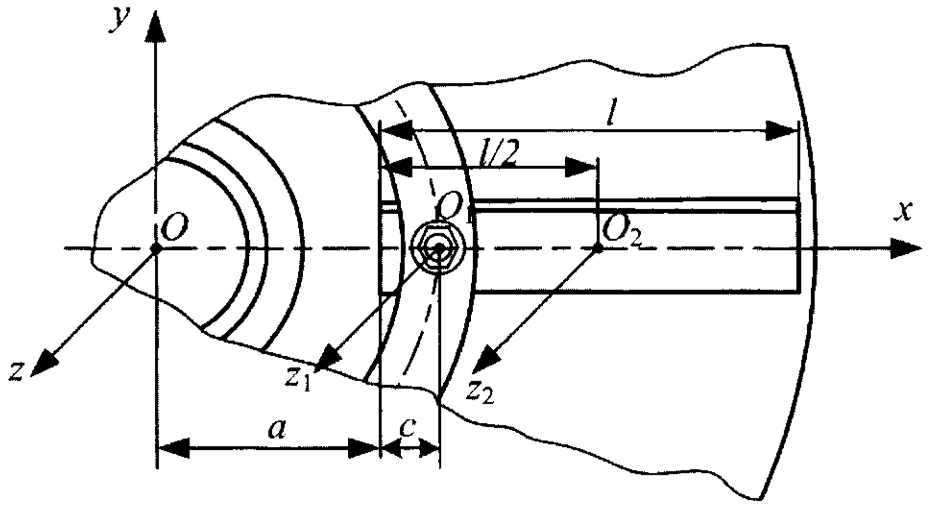


Рисунок 2 – Расчетная схема однозвенной механической системы (для одного ножа)

Кинетическая энергия одного ножа определяется:

$$T_1^{ножа} = \frac{J_z^{ножа}\omega^2}{2} = \frac{J_z^{ножа}\dot{\varphi}^2}{2}, \qquad (5)$$

где $J_z^{ножа}$ – момент инерции массы ножа относительно оси Oz.

Момент инерции пластины ножа с отверстием круглой формы относительно вертикальной оси Oz равен разности моментов инерции цельной пластины и круглого отверстия относительно той же оси [2], т.е.

$$J_z^{ножа} = J_z^{пл.ножа} - J_z^{кр.отв.}, \qquad (6)$$

где $J_z^{пл.ножа}$ – момент инерции массы пластины ножа без отверстия относительно оси Oz;

$J_z^{кр.отв.}$ – момент инерции массы круглого отверстия в пластине ножа относительно оси Oz.

Для определения указанных моментов инерции массы используем теорему Гюйгенса-Штейнера [1], согласно которой, сначала определим моменты инерции масс цельной пластины ножа и круглого отверстия относительно оси, проходящей через их центры масс.

Пластина ножа представлена на рисунке 3.

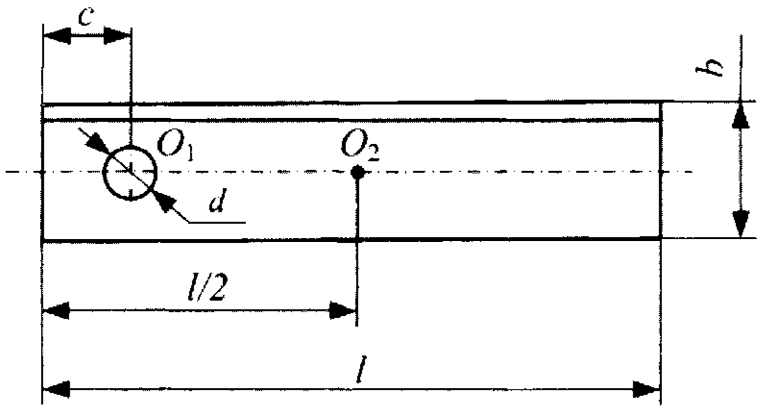


Рисунок 3 – Нож роторного измельчителя

Для прямоугольной пластины момент инерции массы относительно оси O_2z_2, проходящей через ее центр масс, определяется по [2]:

$$J_{z_2} = m_1\left(\frac{h^2}{12}+\frac{l^2}{12}\right), \tag{7}$$

где m_1 – масса пластины ножа без отверстия;

$$m_1 = \rho lbh, \tag{8}$$

где ρ – плотность материала (сталь), *кг/м*^{3};

l–длина пластины ножа, *м*;

b–ширина пластины ножа, *м*;

h–толщина пластины ножа, *м*.

Для отверстия круглого сечения момент инерции определим как момент инерции массы цилиндра равного по объему отверстию в пластине ножа относительно оси O_1z_1, проходящей через его центр масс [2]:

$$J_{z_1} = \frac{m_2 r^2}{2}, \tag{9}$$

где m_2 – масса материала круглого отверстия;

r – радиус отверстия в пластине ножа;

$$m_2 = \rho\pi r^2 h, \tag{10}$$

При переносе моментов инерции массы между параллельными осями по теореме Гюйгенса-Штейнера получим:

для пластины ножа без отверстия

$$J_z^{пл.ножа} = J_{z_2}^{пл} + m_1\left(a+l/2\right)^2 = m_1\left[\left(\frac{h^2}{12}+\frac{l^2}{12}\right)+\left(a+\frac{l}{2}\right)^2\right]; \tag{11}$$

для отверстия круглого сечения

$$J_z^{кр.отв.} = J_{z_1}^{кр} + m_2\left(a+c\right)^2 = m_2\left[\frac{r^2}{2}+\left(a+c\right)^2\right]; \tag{12}$$

Тогда момент инерции массы пластины ножа с отверстием относительно оси Oz определим по формуле

$$J_z^{ножа} = m_1\left[\left(\frac{h^2}{12}+\frac{l^2}{12}\right)+\left(a+\frac{l}{2}\right)^2\right]-m_2\left[\frac{r^2}{2}+\left(a+c\right)^2\right]. \tag{13}$$

Окончательно для кинетической энергии одного ножа запишем уравнение:

$$T_1^{ножа} = \frac{\left\{m_1\left[\left(\frac{h^2}{12}+\frac{l^2}{12}\right)+\left(a+\frac{l}{2}\right)^2\right]-m_2\left[\frac{r^2}{2}+\left(a+c\right)^2\right]\right\}\dot{\varphi}^2}{2}. \tag{14}$$

Кинетическая энергия верхнего кольца роторного измельчителя:

$$T_2^{\substack{верхнего\\кольца}} = \frac{J_z^{в.к.}\dot{\varphi}^2}{2}, \tag{15}$$

где $J_z^{в.к.}$ – момент инерции массы верхнего кольца роторного измельчителя относительно оси Oz.

В конструкции кольца учтем наличие четырех отверстий (диаметром d) для крепления блока ножей, используя теорему Гюйгенса-Штейнера, запишем уравнение:

$$J_z^{в.к.} = J_z^{бол.кр.} - J_z^{мал.кр.} - 4 \cdot J_z^{отв.}, \qquad (16)$$

где $J_z^{бол.кр.}$ – момент инерции массы большого круга относительно центральной оси Oz;

$J_z^{мал.кр.}$ – момент инерции массы малого круга (центрального отверстия в верхнем кольце) относительно центральной оси Oz;

$J_z^{отв.}$ – момент инерции массы малого круга (отверстия для крепления блока ножей) относительно центральной оси Oz.

$$J_z^{бол.кр.} = m^{бол.кр.} \frac{\left(r_{в.к.}^{бол.кр.}\right)^2}{2}, \qquad (17)$$

где $m^{бол.кр.}$ – масса материала большого круга верхнего кольца;

$r_{в.к.}^{бол.кр.}$ – наружный радиус большого круга верхнего кольца (рисунок 1).

$$m^{бол.кр.} = \rho\pi\left(r_{в.к.}^{бол.кр.}\right)^2 h^{в.к.}, \qquad (18)$$

где $h^{в.к.}$ – толщина верхнего кольца.

$$J_z^{мал.кр.} = m^{мал.кр.} \frac{\left(r_{в.к.}^{мал.кр.}\right)^2}{2}, \qquad (19)$$

где $m^{мал.кр.}$ – масса материала малого круга верхнего кольца;

$r_{в.к.}^{мал.кр.}$ – внутренний радиус малого круга верхнего кольца (рисунок 1).

$$m^{мал.кр.} = \rho\pi\left(r_{в.к.}^{мал.кр.}\right)^2 h^{в.к.}. \qquad (20)$$

Для отверстия под крепление блока ножей имеем:

$$J_z^{отв.} = m_{кр.}^{отв.}\left[\frac{r_{кр}^{\,2}}{2} + (a+c)^2\right], \qquad (21)$$

где $m_{кр.}^{отв.}$ – масса материала круга отверстия;

$r_{кр}$ – радиус отверстия для крепления блока ножей.

Аналогично формуле (10) для отверстия под крепление блока ножей:

$$m_{кр.}^{отв.} = \rho\pi r_{кр.}^{\;2} h^{в.к.}. \qquad (22)$$

Окончательно момент инерции массы верхнего кольца относительно оси Oz равен:

$$J_z^{в.к.} = m^{бол.кр.} \frac{\left(r_{в.к.}^{бол.кр.}\right)^2}{2} - m^{мал.кр.} \frac{\left(r_{в.к.}^{мал.кр.}\right)^2}{2} - 4 \cdot m_{кр.}^{отв.}\left[\frac{r_{кр}^{\,2}}{2} + (a+c)^2\right]. \qquad (23)$$

После преобразования уравнения (23) получим:

$$J_z^{в.к.} = \rho\pi h^{в.к.} \left\{ \frac{\left(r_{в.к.}^{бол.кр.}\right)^4}{2} - \frac{\left(r_{в.к.}^{мал.кр.}\right)^4}{2} - 4 \cdot r_{кр}^{\ 2} \left[\frac{r_{кр}^{\ 2}}{2} + (a+c)^2 \right] \right\}. \tag{24}$$

Тогда кинетическая энергия верхнего кольца роторного измельчителя с учетом формул (16–24) определяется как:

$$T_2^{\substack{верхнего \\ кольца}} = \frac{\rho\pi h^{в.к.} \left\{ \frac{\left(r_{в.к.}^{бол.кр.}\right)^4}{2} - \frac{\left(r_{в.к.}^{мал.кр.}\right)^4}{2} - 4 \cdot r_{кр}^{\ 2} \left[\frac{r_{кр}^{\ 2}}{2} + (a+c)^2 \right] \right\} \dot{\varphi}^2}{2}. \tag{25}$$

Кинетическая энергия нижнего кольца роторного измельчителя:

$$T_3^{\substack{нижнего \\ кольца}} = \frac{J_z^{н.к.} \dot{\varphi}^2}{2}, \tag{26}$$

где $J_z^{н.к.}$ – момент инерции массы нижнего кольца роторного измельчителя относительно оси Oz.

Геометрия верхнего и нижнего колец роторного измельчителя отличается величинами соответствующих радиусов и толщинами колец. Следовательно, кинетическую энергию нижнего кольца можно определить по формуле

$$T_3^{\substack{нижнего \\ кольца}} = \frac{\rho\pi h^{н.к.} \left\{ \frac{\left(r_{н.к.}^{бол.кр.}\right)^4}{2} - \frac{\left(r_{н.к.}^{мал.кр.}\right)^4}{2} - 4 \cdot r_{кр}^{\ 2} \left[\frac{r_{кр}^{\ 2}}{2} + (a+c)^2 \right] \right\} \dot{\varphi}^2}{2}, \tag{27}$$

где $r_{н.к.}^{бол.кр.}$, $r_{н.к.}^{мал.кр.}$ – радиус большого и малого круга нижнего кольца роторного измельчителя;

$h^{н.к.}$ – толщина нижнего кольца.

Кинетическая энергия стержня шпильки:

$$T_4^{\substack{стержня \\ шпильки}} = \frac{J_z^{шп} \dot{\varphi}^2}{2}, \tag{28}$$

где $J_z^{шп}$ –момент инерции массы стержня шпильки относительно оси Oz.

$$J_z^{шп} = J_{z_1}^{шп} + m_{шп} (a+c)^2, \tag{29}$$

где $J_{z_1}^{шп}$ – момент инерции массы стержня шпильки относительно оси O_1z_1;

$m_{шп}$ – масса стержня шпильки.

$$J_{z_1}^{шп} = \frac{m_{шп} r^2_{\ шп}}{2}, \tag{30}$$

где $r_{шп}$ – радиус стержня шпильки;

$$J_z^{шп} = \frac{m_{шп} r_{шп}^2}{2} + m_{шп}(a+c)^2 = \rho\left(\pi r_{шп}^2 l_{шп}\right)\left(0{,}5 \cdot r_{шп}^2 + (a+c)^2\right), \tag{31}$$

где $l_{шп}$ – длина стержня шпильки.

$$T_4^{шп} = \left[\frac{\rho\left(\pi r_{шп}^2 l_{шп}\right)\left(0{,}5 \cdot r_{шп}^2 + (a+c)^2\right)}{2}\right]\dot{\varphi}^2. \tag{32}$$

Тогда уравнение (2) запишется:

$$T = \left(\frac{z}{2} k J_z^{ножа}\right)\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{J_z^{в.к.}}{2}\right)\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{J_z^{н.к.}}{2}\right)\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{J_z^{шп}}{2 \cdot z}\right)\dot{\varphi}^2. \tag{33}$$

После преобразования получим:

$$T = \left(zkJ_z^{ножа} + J_z^{в.к.} + J_z^{н.к.} + zJ_z^{шп}\right)\frac{\dot{\varphi}^2}{2}, \tag{34}$$

Часть уравнения (34) находящегося в скобках обозначим через коэффициент B:

$$B = zkJ_z^{ножа} + J_z^{в.к.} + J_z^{н.к.} + zJ_z^{шп}. \tag{35}$$

Тогда для уравнения Лагранжа второго рода получим:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \left(zkJ_z^{ножа} + J_z^{в.к.} + J_z^{н.к.} + zJ_z^{шп}\right)\dot{\varphi}, \tag{36}$$

Продифференцировав по времени выражение (36) получим:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \left(zkJ_z^{ножа} + J_z^{в.к.} + J_z^{н.к.} + zJ_z^{шп}\right)\ddot{\varphi}. \tag{37}$$

Тогда частная производная кинетической энергии по обобщенной координате будет равна:

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \tag{38}$$

Для определения обобщенной силы запишем уравнение работы δA на возможном перемещении. Так как обобщенной координатой является угол поворота ротора, то работа на возможном перемещении $\delta\varphi$ равна:

$$\delta A = M_{кр}\delta\varphi. \tag{39}$$

Из уравнения (39) получим обобщенную силу, которая имеет размерность крутящего момента:

$$Q = M_{кр}. \tag{40}$$

Окончательно уравнение Лагранжа второго рода принимает вид:

$$B\ddot{\varphi} = M_{кр}, \tag{41}$$

Или в развернутой форме:

$$\left(zkJ_z^{ножа} + J_z^{в.к.} + J_z^{н.к.} + zJ_z^{шп}\right)\ddot{\varphi} = M_{кр}. \tag{42}$$

Решение уравнения получим в виде:

$$\ddot{\varphi} = \frac{M_{кр}}{B} \text{ или } \ddot{\varphi} = \frac{M_{кр}}{zkJ_z^{ножа} + J_z^{в.к.} + J_z^{н.к.} + zJ_z^{шп}}. \tag{43}$$

Крутящий момент связан с мощностью ротора следующей зависимостью:

$$M_{кр} = N/\dot{\varphi}. \tag{44}$$

С учетом уравнения (44) решение получим в следующем виде:

$$\ddot{\varphi} = \frac{N}{B\dot{\varphi}} \text{ или } \ddot{\varphi} = \frac{N}{\dot{\varphi}\left(zkJ_z^{ножа} + J_z^{в.к.} + J_z^{н.к.} + zJ_z^{шп}\right)}. \tag{45}$$

Последнее выражение имеет сложный характер и может быть полезно при исследовании движения ротора в случае переменной скорости вращения ножей.

Заключение

Составлена расчетная схема динамики движения роторного измельчителя и получены уравнения движения блока ножей относительно оси вращения на основе уравнения Лагранжа второго рода. Предложенные динамические уравнения движения позволяют определить текущее положение, углы поворота, скорость и ускорение блока ножей роторного измельчителя в любой момент времени.

Литература

1 Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М.: Высшая школа, 1986. – 416 с.
2 Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики: учеб.для машиностроит. и приборостроит. спец. вузов. – 5-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1990. – 607 с.

Поступила в редакцию 24.12.2014