УДК 534.1+517.9

К ЗАДАЧЕ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА С КВАДРАТИЧНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Гребенцов Ю.М.
Могилевский государственный университет продовольствия
г. Могилев, Беларусь

В настоящей работе, являющейся продолжением и развитием [1], исследуется задача о периодических решениях (с периодом ω) системы

$$\ddot{x} = \lambda A(t)x + \left(\lambda P + \lambda^2 Q(t)\right)\dot{x} + f(t), \tag{1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A(t), Q(t), f(t)$ – непрерывные ω-периодические матрицы соответствующих размерностей, P – постоянная матрица, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Следуя подходу [2], ω-периодическое решение системы (1) отыскивается в виде

$$x(t,\lambda) = c(\lambda) + z(t,\lambda), \tag{2}$$

где $c(\lambda)$ – постоянный вектор, $z(t,\lambda)$ – ω-периодическая вектор-функция, подчиненная интегральному условию

$$\int_0^\omega A(\tau)z(\tau,\lambda)d\tau = 0 .$$

Примем следующие обозначения:

$$\tilde{A}(\omega) = \int_0^\omega A(\tau)d\tau,\;\; g(t) = f(t) - A(t)\tilde{A}^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau)d\tau,\; \alpha = \max_t \|A(t)\|,\; \delta = \|P\|,\; \gamma = \left\|\tilde{A}^{-1}(\omega)\right\|,$$

$$\sigma = \max_t \|Q(t)\|,\; \tilde{h} = \left\|\int_0^\omega f(\tau)d\tau\right\|,\; h_0 = \max_t \|g(t)\|,\; \varepsilon = |\lambda|,\; \|y\|_C = \max_t \|y(t)\|,$$

$$q_1 = \frac{\omega}{2}\left(\frac{1}{2}\gamma\alpha^2\omega^2 + \delta\right),\; q_2 = \frac{\omega\sigma}{2}(\gamma\alpha\omega + 1),\; q(\varepsilon) = q_1\varepsilon + q_2\varepsilon^2,\; H = \frac{\omega h_0}{2(1-q(\varepsilon))};\; t \in [0,\omega].$$

Теорема. *Пусть выполнено условие* $\det\tilde{A}(\omega) \neq 0$. *Тогда в области* $0 < |\lambda| < 2/(q_1 + \sqrt{q_1^2 + 4q_2})$ *система* (1) *имеет единственное* ω-*периодическое решение. Это решение представимо в виде* (2), *при этом справедливы оценки*

$$\|c(\lambda)\| \le \varepsilon\gamma\sigma\omega H + \frac{1}{\varepsilon}\gamma\tilde{h},\; \|z(t,\lambda)\| \le \frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2 H,\; \|dz(t,\lambda)/dt\| \le H.$$

Решение поставленной задачи получено в следующем виде:

$$c(\lambda) = \sum_{k=0}^\infty \lambda^{k-1}c_{k-1},\; z(t,\lambda) = \sum_{k=0}^\infty \lambda^k z_k(t),\; y(t,\lambda) = \sum_{k=0}^\infty \lambda^k y_k(t),\; (dz(t,\lambda)/dt = y(t,\lambda)), \tag{3}$$

где

$$c_{-1} = -\tilde{A}^{-1}(\omega)\int_0^\omega f(\tau)d\tau,\; c_0 = 0,\; y_0(t) = \int_0^\omega \varphi(t,\tau)f(\tau)d\tau,\; c_k = -\tilde{A}^{-1}(\omega)\int_0^\omega Q(\tau)y_{k-1}(\tau)\,d\tau, \tag{4}$$

$$z_m(t)=\int_0^{\omega}K(t,\tau)y_m(\tau)\,d\tau,\; y_1(t)=\int_0^{\omega}\varphi(t,\tau)\left[A(\tau)z_0(\tau)+Py_0(\tau)+A(\tau)c_0\right]d\tau, \tag{5}$$

$$y_{k+1}(t)=\int_0^{\omega}\varphi(t,\tau)\left[A(\tau)z_k(\tau)+Py_k(\tau)+Q(\tau)y_{k-1}(\tau)+A(\tau)c_k\right]d\tau;\; m=0,1,2,\ldots,\; k=1,2,\ldots \tag{6}$$

При этом справедливы оценки

$$\psi_{k+1}\le N_0\psi_{k+1}+N_1\psi_k+N_2\psi_{k-1}, \tag{7}$$

где $\psi_i=\mathrm{colon}(\|c_i\|_C,\|z_i\|_C,\|y_i\|_C),\ (i=0,1,2,\ldots)$,

$$N_0=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&\frac{1}{2}\gamma\alpha\omega^2\\0&0&0\end{pmatrix},\; N_1=\begin{pmatrix}0&0&\gamma\sigma\omega\\0&0&0\\\frac{\alpha\omega}{2}&\frac{\alpha\omega}{2}&\frac{\delta\omega}{2}\end{pmatrix},\; N_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&\frac{\sigma\omega}{2}\end{pmatrix}.$$

Так как матрица $(E-N_0)$ (E – единичная матрица) положительно обратима, то (7) можно записать в виде

$$\psi_{k+1}\le\tilde N_1\psi_k+\tilde N_2\psi_{k-1},\; k=1,2,\ldots, \tag{8}$$

где $\tilde N_1=(E-N_0)^{-1}N_1,\;\; \tilde N_2=(E-N_0)^{-1}N_2.$

С помощью оценок (7), (8) установлено, что ряды (3) сходятся равномерно по $t\in\mathbb{R}$ к решению системы интегральных уравнений, эквивалентной данной задаче, при этом справедливы оценки, определяемые на основе алгоритма (4)–(6),

$$\psi\le(E-\tilde N(\varepsilon))^{-1}\left[(E-\tilde N(\varepsilon))\frac{1}{\varepsilon}\psi_{-1}+(E-\varepsilon\tilde N_1)\psi_0+\varepsilon\psi_1\right],$$

$$\tilde r_m\le r_m\le(E-\tilde N(\varepsilon))^{-1}\left[(\tilde N_1+\varepsilon\tilde N_2)\psi_m+\tilde N_2\psi_{m-1}\right]\varepsilon^{m+1},$$

где $\tilde N(\varepsilon)=\varepsilon\tilde N_1+\varepsilon^2\tilde N_2,\;\tilde r_m=\mathrm{colon}\left(\|c(\lambda)-\tilde c_m(\lambda)\|,\|z(t,\lambda)-\tilde z_m(t,\lambda)\|_C,\|y(t,\lambda)-\tilde y_m(t,\lambda)\|_C\right),$

$$r_m=\varepsilon^{m+1}\psi_{m+1}+\varepsilon^{m+2}\psi_{m+2}+\ldots,\;\psi_{-1}=\mathrm{colon}\left(\left\|\tilde A^{-1}(\omega)\int_0^{\omega}f(\tau)d\tau\right\|,0,0\right),$$

$$\psi_0=\mathrm{colon}\left(0,\|z_0\|_C,\|y_0\|_C\right),\;\psi=\mathrm{colon}\left(\|c(\lambda)\|,\|z(t,\lambda)\|_C,\|y(t,\lambda)\|_C\right),$$

$$\tilde c_m(\lambda)=\frac{1}{\lambda}c_{-1}+\sum_{k=0}^{m}\lambda^k c_k,\;\tilde z_m(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{m}\lambda^k z_k(t),\;\tilde y_m(t,\lambda)=\sum_{k=0}^{m}\lambda^k y_k(t).$$

Литература

1. Гребенцов, Ю.М. О периодических решениях линейных неавтономных систем второго порядка с параметром / Ю.М. Гребенцов // XVI Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям (ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2017): тез. докл. Междунар. науч. конф., Минск, 16–20 мая 2017 г. / Ин-т математики НАН Беларуси. – Минск, 2017. – Ч. 1. – С. 47.

2. Лаптинский, В.Н. Об одном подходе к отысканию периодических решений дифференциальный уравнений / В.Н. Лаптинский // Весці АН БССР. Серыя фіз.-матэм. навук. – 1990. – №5. – С.25–30.